Minimal model theory for surfaces over an imperfect field

田中公*

0 はじめに

本稿は未発表のプレプリント [T2] について、代数学シンポジウムで講演した内容をまとめたものである。

1 主定理

定理 1.1 (主定理)**.** k を正標数の体とする。(X, Δ) を k 上の log canonical な射影曲面とする。

1. (X, Δ) に対して、MM P が成立する。つまり、因子収縮射の列があり、最後には極小モデルまたは森ファイバー空間になる。
2. もし $K_X + \Delta$ がネフなら半豊富となる。

上記 1 が極小モデルプログラムと呼ばれるもので、2 がアバンダンスと呼ばれるものである。本定理は閉体上および標数ゼロでは既に知られていた結果である。上記の定理を証明しようと思った際、まず思いつくのは次の 2 つの方法である。

a. 閉体の時の証明を適用する。

b. 閉体の場合に帰着する。

例えば、上記 1(MMP) は a の方法で証明される。実際、証明は [T1] とほとんど同じであるので割愛する。上記 2(アバンダンス) は a の方法は適用できない。例えば、閉体の場合はアルバネーゼ射やネーターの公式などを用いるが、これらは regular な曲面には適用できない（と思われる）からである。実際には、アバンダンスは b の方法によって証明される。この為の鍵は以下の定理である。

定理 1.2. k を標数 $p > 0$ の体とし、X を k 上の regular な多様体とする。Y を $X \times_k k^{1/p^\infty}$ の被約構造の正規化とし、$f : Y \to X$ を誘導された射とする。すると、Y 上の有効因子 C が存在し、

$$K_Y + C = f^* K_X$$

が成立する。

上記の設定において、Y は $\mathbb{Q}$-分解的である。また $f^* K_X$ はカルティエ因子なので、上記の等号は因子としての等号である。ただ、K_Y 自身が因子として定まっている訳ではなく、線形同値の分の不定性があるので、上記等号は因子を線形同値で割ったレベルでの等号であるというべきかも知れない。いずれにせよ、主張は Y の標準因子の方が X の標準因子より小さい、というものである。系として例えば次を得る。

系 1.3. k を標数 $p > 0$ の体とし、X を k 上の regular な射影多様体とする。Y を $X \times_k k^{1/p^\infty}$ の被約構造の正規化とする。すると、不等式

$$\kappa(X, K_X) \geq \kappa(Y, K_Y)$$

が成立する。

*tanakahi@math.kobe-u.ac.jp

2 主定理の証明の概略

主定理の内、MMＰは証明が閉体の時と同じなので、アバンダンスについて説明する。大ざっぱに言うと、アバンダンスの証明はマンフォードの既知の結果と定理 1.2 によって示せる。なので、定理 1.2 の証明について概観する。まず、X が幾何学的に被約なら既知の結果から従う。実際、この場合は正規化射について双対化層の挙動を追うだけで良い。なので、問題は幾何学的に被約でない場合である。被約でないゴレンシュタインなスキームが与えられて、それの被約構造を取った際、両者の双対化層を比べるのは難しい。なので、被約でないスキームが現れないようにすればよい。この為に次の補題が重要である。

補題 2.1. k を標数 $p > 0$ の体とし、k' と L を k を含む体とする。次の２つを仮定する。

- $[k' : k] = p$.
- L/k は純非分離的に閉じている。つまり、$x \in L$ かつ $x^p \in k$ ならば $x \in k$ が成立する。

すると、$L \otimes_k k'$ は体。

見ての通り、可換体に関する主張である。正直に条件を使っていけば証明できる。k を正標数の体として、X を k 上の正規な多様体とする。$L := K(X)$ として上の補題を適用する事を考える。２つ目の「L/k は純非分離的に閉じている。」という条件は $\alpha : X \to \operatorname{Spec} k$ という構造射が $\alpha_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}$ という条件を満たせばＯＫである。なので、k を Stein 分解 $X \to \operatorname{Spec} k_1 \to \operatorname{Spec} k$ に現れる k_1 で取り換えれば、上記の条件は満たされる。すると、上記の補題は、「次数 p の純非分離拡大 k'/k によって base change したスキーム $X \times_k k'$ は integral になる」という事を主張している。よって、更に $X \times_k k'$ の正規化 X' をとる。すると、組 (X, k) から少し拡大した体上の組 (X', k') が得られた事になる。これをどんどん繰り返して、かつ適切に体拡大と取っていくと、有限回操作を行った後の組 (X'', k'') が良い性質（正確には X'' が k'' 上幾何学的に被約という性質）を満たし、あとは k'' から k^{1/p^∞} まで base change してやると結論が得られる。

3 その他の定理

定理 1.2 は綺麗な主張なので、他にも応用があるべきではないか？と考えるのは自然な事だと思う。実際に、例えば次の２つの定理が得られた。

定理 3.1. k を正標数の代数閉体とする。$f : X \to Y$ を正規な多様体の間の射影な全射で $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ を満たすとする。K_X が $\mathbb{Q}$-カルティエとし、$K_X \equiv_f 0$ とする。もし一般ファイバーが正規でなければ、X は uniruled である。

定理 3.2. k を正標数の代数閉体とする。$f : X \to Y$ を正規な多様体の間の射影な全射で $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ を満たすとする。X が $\mathbb{Q}$-分解的とし、$-K_X$ が f-豊富で $\rho(X/Y) = 1$ とする。すると、f の一般ファイバーは rationally chain connected である。

上記２つのファイバー空間はどちらも極小モデル理論で重要である。どちらも generic fiber を取ってから定理 1.2 や、定理 1.2 と同じ議論を適用する事によって主張が得られる。

謝辞

代数学シンポジウムで講演の機会を下さったオーガナイザーの皆様に感謝しています。

参考文献

[T1] H. Tanaka, Minimal models and abundance for positive characteristic log surfaces, to appear in Nagoya Math. J.

[T2] H. Tanaka, Minimal model theory for surfaces over an imperfect field, preprint.