Degeneration of normal functions and log mixed Hodge theory

Chikara Nakayama (Hitotsubashi Univ.)

1 Introduction: normal functions, old and new

主題である normal function の例から始める.

例 1. domainwall tension $\mathcal{T}$. 最初に Morrison–Walcher [11] による, domainwall tension と normal function との関係について, 簡単に解説する.

宇宙は一般に時空 4 次元であると思われているが, 超弦理論によれば（超弦理論については本報告集の大栗氏の報告参照）, 実際には宇宙は 10 次元であり, $\mathbf{R}^4$ と非常に小さい Calabi–Yau 多様体との直積の構造を持ち, いろいろな粒子は実際には 1 次元の弦であるという. 弦には閉じている弦と開いている弦とがあり, それぞれ S^1 および line と同相であるが, 開いている弦（open string）は自由に動けるのではなく, 端点が, ある次元の部分多様体上を動くという制約がある. この部分多様体を brane といい, 典型的には Calabi–Yau 多様体の中の実 3 次元部分多様体である. この brane の中に壁があり, その左右で open string を統制する法則が違う. この壁を domainwall, その単位面積あたりの重さを tension といい, $\mathcal{T}$ で表す.

次に Calabi–Yau 多様体の族が与えられたときに, $\mathcal{T}$ を parameter space（例えば $\mathbf{P}^1$）上の関数とみて, この関数を計算するために, mirror 族を考える. すると mirror Calabi–Yau 多様体の中には mirror brane があり, それは 1-cycle になっているので, 1-cycle の族 $\zeta = C_+ - C_-$ が得られるが, これに伴う normal function $\nu_\zeta = \int_{C_-}^{C_+}$ が大体 $\mathcal{T}$ になるというのが open mirror symmetry の帰結である：

$$\mathcal{T} = \nu_\zeta(\hat{\Omega}) := \int_{\mathcal{C}_-}^{\mathcal{C}_+} \hat{\Omega}.$$

ただし $\hat{\Omega}$ はある標準的な微分形式である.

従来の（open でない）mirror symmetry と同様, 族が退化するときの様子（normal function の退化）が重要になって来る.

以上を [11] では mirror quintic 族

$$V_\psi\colon x_1^5+\cdots+x_5^5-5\psi x_1\cdots x_5=0,\quad \psi\in\mathbf{P}^1,$$

の場合に計算で確かめている. Brane は $V_\psi(\mathbf{R})$ であり, mirror の 1-cycle は, $\{x_1+x_2=x_3+x_4=0\}\cap V_\psi=C_++C_-+$ (line) と書いたとき,

$$\zeta=C_+-C_-$$

から引き起こされる.

例 2. Poincaré normal function. Normal function はもともと Poincaré [15] が導入した. $X=\{f(x,y,z)=0\}\subset\mathbf{P}^3$ を surface とし, $y=t$ で cut した pencil $g\colon\widetilde{X}\to\mathbf{P}^1$ を考える. $D\subset\mathbf{P}^1$ を特異 locus, $\omega(t)$ を X_t 上の 1-form の族 ($t\in\mathbf{P}^1\smallsetminus D$) とする. 一方 $C\subset X$ を degree d の curve (1-cycle) として, $C\cap X_t=\{p_1(t),\dots,p_d(t)\}$ と置き, $p_0\in\bigcap X_t$ を取る.

$$\nu(\omega)(t)=\sum_{j=1}^{d}\int_{p_0}^{p_j(t)}\omega(t)$$

は $t\in\mathbf{P}^1\smallsetminus D$ の関数である. Poincaré は, ω を動かして, この $\mathbf{P}^1\smallsetminus D$ 上の関数の, 退化 locus D の近くでの挙動を研究した.

2 Normal function は中間 Jacobian の section である

Modern formulation に進む.

H を解析空間 S 上の重み -1 の VPHS とする (例 1 では $H=R^3(V\to\mathbf{P}^1)_*\mathbf{Z}(2)$, 例 2 では $H=R^1g_*\mathbf{Z}(1)$ である).

複素 torus の族

$$\begin{aligned}J/S=J(H)/S&:=H_{\mathbf{Z}}\backslash H_{\mathcal{O}}/F^0\\&=\mathcal{E}xt_{\mathrm{MHS}/S}(\mathbf{Z},H)\end{aligned}$$

を中間 Jacobian という.

定義. J/S の section $\in\mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}/S}(\mathbf{Z},H)$ を, H に関する normal function (NF) という.

例 3. Green–Griffiths [3] は例 2 を発展させ, Hodge 予想が次の, NF の退化に関する statement と同値であることを示した: 任意の $2m$ 次元 smooth projective variety X, X 上の very ample な line bundle L, nontorsion な $\zeta \in H^{m,m}_{\mathrm{prim}}(X, \mathbf{Z})$ に対し, ある $d > 0$ が存在して, $P \setminus \check{X}$ 上の NF ν_ζ が boundary (= 特異 locus $\check{X}$) のどこかで singular である.

ただし, ν_ζ は ζ から決まる NF で, H としては, $(X, L^{\otimes d})$ に付随する incidence variety から $P := |L^{\otimes d}|$ への射を smooth locus $P \setminus \check{X}$ に制限したもの g の $R^{2m-1}g_*\mathbf{Z}(m)$ を考えている.

ここまでのまとめ : 例 1–3 からもわかるように

$$\boxed{\text{NF は退化が重要}} \Rightarrow \boxed{\text{LMH が役立つ}}.$$

ここで LMH とは log mixed Hodge 構造 のことである. 今回, 例としてとりあげたいのは, Brosnan–Pearlstein [1] および Schnell [17] により独立に証明された, zero locus の代数性といわれる次の定理である.

主定理. *S を proper smooth な代数多様体, S^* を Zariski open な subset, H を S^* 上の重み -1 の VPHS とする. $\nu\colon S^* \to J(H)$ を, admissible normal function (ANF) とする. このとき零点集合 $\{\nu = 0\} \subset S^*$ は代数的である.*

ここで admissibility とは Saito [16] による, boundary $S \setminus S^*$ 付近での挙動に関する条件である. Zero locus の代数性は, 例 3 の, Hodge 予想との関連で興味が持たれた. 以下, LMH を用いたこの定理の簡明な別証明および一般化を解説したい.

3 Analytic Néron model

Analytic Néron model とは NF の退化を受け止める空間である. つまり, 中間 Jacobian J/S^* の部分コンパクト化 $\overline{J}/S$ であって, ν が S 上の section に延びる（このとき $\overline{J}$ は ν を graph するという）ような空間である:

$$\begin{array}{ccc} J & \hookrightarrow & \overline{J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^* & \hookrightarrow & S. \end{array}$$

これまでに, いくつかの analytic Néron model が提案されている. 最初は Green–Griffiths–Kerr model [4] であり, これは, base S が 1 次元の場合である. Base が高次元の場合には, Brosnan–Pearlstein–Saito の空間 [2], Schnell の空間 [17] がある.

その一つとして, log Néron model（Kato–Usui と共同 [8]）を提案したい. Log Néron model は LMH の fine moduli であり, 特に, 構造層を持つ空間である. Hausdorffness 等のよい性質を持ち, nontorsion singularity も扱える等, 適用範囲が広い.

構成の idea は次の通りである. H/S^* は, PLH（偏極 log Hodge 構造）として, 一意的に $\overline{H}/S$ に延びる（次節の圏同値 (1)）. このとき

$$J = (\text{MHS の extension } 0 \to H \to * \to \mathbf{Z} \to 0 \text{ の moduli})$$

であったが, これを,

$$\overline{J} = (\text{LMH の extension } 0 \to \overline{H} \to * \to \mathbf{Z} \to 0 \text{ の moduli})$$

で部分コンパクト化する. 定義から明らかに $\overline{J}|_{S^*} = J$ である. 次々節まで, より詳しく解説する.

4 LMH の復習

S を log 解析空間とするとき, S 上の環付き空間 $S^{\log}$ が定義される（[5]）. 構造射は τ で表される:

$$\tau\colon S^{\log} \to S.$$

$S^{\log}$ の構造環 $\mathcal{O}_S^{\log}$ は大体 $\mathcal{O}_S$ 上の多項式環 $\tau^{-1}\mathcal{O}_S[\log t_1, \dots, \log t_r]$ である. ここで $t_1, \dots, t_r$ は log の生成元を表す.

例. Δ を log pointed disk, つまり disk に原点で log を付したもの, とすると, $\Delta^{\log}$ は, Δ の原点を S^1 で置き換えた空間 $S^1 \times [0,1)$ と同相である.

0 を standard log point, つまり $\operatorname{Spec}\mathbf{C}$ に $\mathbf{N}$ で log を付したもの, とすると, $0^{\log}$ は S^1 であり, 構造層 $\mathcal{O}_0^{\log}$ は, 一変数多項式環 $\mathbf{C}[\log t]$ に値を持つ局所定数層で, monodromy は $\log t \mapsto \log t - 2\pi i$ である.

f が proper log smooth exact のとき, $f^{\log}$ は位相的に局所自明であることが知られている（[14]）. この結果は, log 構造を付すことで特異多様体があたかも非特異であるかのように扱えるという log 幾何の基本哲学を, 空間 $S^{\log}$ によって説明している.

さて 3 つ組 $H = (H_{\mathbf{Z}}, H_{\mathcal{O}}, \iota)$ が S 上の重み w の log Hodge 構造 (LH) であるとは,

- $H_{\mathbf{Z}}$ は $S^{\log}$ 上の有限生成局所自由な $\mathbf{Z}$-加群の層;
- $H_{\mathcal{O}}$ は S 上の有限生成局所自由な $\mathcal{O}_S$-加群の層＋ Hodge filtration;
- ι は $\mathcal{O}_S^{\log}$-加群としての同型 $\mathcal{O}_S^{\log} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}} \cong \mathcal{O}_S^{\log} \otimes_{\tau^{-1}\mathcal{O}_S} \tau^{-1}H_{\mathcal{O}}$

であって, 通常の条件をみたすことである. さらに weight filtration を付加すれば, LMH の定義を得る.

定義. H を S 上の重み -1 の PLH とする. H に関する normal function とは $\mathrm{Ext}_{\mathrm{LMH/S}}(\mathbf{Z}, H)$ の元のことである.

Schmid の冪零軌道定理の帰結として, 次の圏同値がある:
$S \supset S^*$ を, smooth な多様体とその上の normal crossing divisor の補集合, あるいはtoric 多様体とその big torus とする（S には自然な log を付す）. このとき,

(1) $\{S^*$上の重み w の PHS$\} \simeq \{S$ 上の重み w の PLH$\}$

(2) $\{S^*$上の H に関する ANF$\} \simeq \{S$ 上の $\overline{H}$ に関する NF$\}$.

ただし, (2) では, (1) によって H から得られる S 上の PLH を $\overline{H}$ と記した.

5 LMH の分類空間

Hodge data $H_0, W, (h^{p,q}), (\langle\ ,\ \rangle_w)_{w\in\mathbf{Z}}$ ($\mathrm{rank}\, H_0 = \sum h^{p,q}$ 等の条件を満たす) を固定する. $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Lie\ Aut}(H_{0,\mathbf{Q}}, W, (\langle\ ,\ \rangle_w)_{w\in\mathbf{Z}})$, $\Gamma = \mathrm{Aut}\, H_{\mathbf{Z}}$ と置く.

Γ-level 構造付き LMH 全部を考えると大きすぎて表現できないので, monodromy に制限をつけて, 部分関手を考える.

Σ を Γ と強可換な $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ の weak fan とする. （ここで weak fan とは fan と同じく cone の集合だが, 多少の overlap を許す. 応用上は, weak fan が自然に現れるので, このように条件を緩める必要があるが, fan と余り違わないので, 以下では fan と weak fan とを区別しなくてもよい. 正確には, 次の条件を満たす : $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ に対し, ある $F \in \check{D}$ が存在して, $(\sigma, F), (\sigma', F), (\sigma\cap\sigma', F)$ が冪零軌道を生成すれば, $\sigma\cap\sigma'$ は σ の face である. つまり冪零軌道（= PLH）が存在しない部分での overlap を許すだけなので, fan の場合と同様な理論展開ができる.)

すると

$$\Gamma\setminus D_\Sigma = \{\Gamma\text{-level 構造付き LMH, local monodromy が } \Sigma \text{ に属する}\}$$

（これは $\Gamma\setminus D = \{\Gamma$-level 構造付き MHS$\}$ を部分として含んでいる）は Hausdorff な slit log 解析空間で表現される！

つまり, MHS の分類空間 $\Gamma\setminus D$ が, LMH の分類空間$\Gamma\setminus D_\Sigma$ によって, 部分的にコンパクト化できた. 証明は混合 SL(2)-軌道定理 [6] を用いる.

(slit log 解析空間とは, 例えば, $X = \mathbf{C}^2 \setminus (\mathbf{C} \times \{0\}) \cup \{(0,0)\}$ ＋ strong topology ＋ ($\mathbf{N}^2$ による log) のように, 普通の空間に slit が入ったものである. Strong topology とは, この X の場合は, 任意の解析空間 A から $\mathbf{C}^2$ への射の像が X に含まれるときには $A \to X$ が連続になるような最も強い位相である.)

Log Néron model $\overline{J}$ を定義する. H を S 上の重み -1 の PLH とする. Weak fan Σ を取り, $\overline{J} = \overline{J}_\Sigma$ を, fiber 積

$$\begin{array}{ccc} \overline{J}_\Sigma & \longrightarrow & \Gamma \setminus D_\Sigma \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ S & \longrightarrow & \Gamma' \setminus D_{\Sigma'} \end{array}$$

で定義する. ここで $\Gamma' \setminus D_{\Sigma'}$ は重み -1 の PLH の分類空間（moduli）, $S \to \Gamma' \setminus D_{\Sigma'}$ は H による周期写像（H に対応する射）, $\Gamma \setminus D_\Sigma$ は $\mathbf{Z}$ の重み -1 の PLH による extension であるようなLMH の分類空間, 右の縦の射は, gr^W_{-1} を取り出す自然な射である. 従って fiber 積は, $\mathbf{Z}$ の, 与えられた H による extension を分類することになる. （実際には周期写像は base を blow up しないとあるとは限らないので, H を固定して relative な moduli problem を解く.）

6 fan はどのくらい作れるか？

前節で定義したように, log Néron model は補助 data Σ に依存する. 応用に際しては適切な Σ を取る必要があり, それは必ずしも自明なことではない. 例えば 2 節の主定理は次の $(*)$ に帰着するが, この $(*)$ は現在のところ未証明である.

$(*)$ （base を blow up すれば）Σ が存在して $\overline{J}_\Sigma$ が ν と 0 とを同時に graph する.

「$(*) \Rightarrow$ 主定理」の証 : $\overline{J}_\Sigma$ には構造層があるので, ν も 0 もその意味での解析関数である. $\overline{J}_\Sigma$ は Hausdorff でもあるので ν と 0 とが一致する locus $\{\nu = 0\} \subset S$ は解析的である. これから代数性が従う. □

この節では $(*)$ の部分結果を解説する.

命題 1. *ある Σ が存在して $\overline{J}_\Sigma$ が ν を graph する.*

これは比較的簡単に示せる（[9]）. しかし

命題 2. $\dim S = 2$ なら $(*)$ は正しい．（これから主定理の $\dim S = 2$ の場合が従う.）

この証明は, 与えられた 2 種類の monodromy cone を離散群 Γ でずらして行くときに生じる overlap を, cone を分割して行くことで解消すればよいが, 組み合わせ論的な, 複雑な線型代数になって行く（[13]）. Key lemma は次である（[12] 3.2）.

補題. (N_1, N_2, F) は重み w の冪零軌道を生成するとする.

$$W(N_1 + N_2)[-w] = W(N_2)[-w] =: M$$

を仮定する．このとき任意の $n \geq 0$ に対し,

$$M_{w-1} \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigl(M_{w-2} + (N_2^j)^{-1}(\operatorname{Im} N_1^{j+1})\bigr) \cap (N_2 N_1^{-1})^n (M_{w-2}) \subset M_{w-2}.$$

この命題の 3 変数での類似がどうなるべきかは知られておらず, $\dim S = 3$ でも, $(*)$ の証明の見通しは立っていない.

抽象的な話が続いたので具体例を述べる.

例. この例は Schnell による．$S^* = \Delta^* \times \Delta^*$ とする．ただし Δ^* は punctured disk である．$H_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^2$, $N_1 = N_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $F^0 = \mathbf{C}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ とする.

$$J^* = \mathbf{C}^\times / (s_1 s_2)^{\mathbf{Z}}$$

である．ここで normal function

$$\nu(s_1, s_2) = [s_1/s_2]$$

を考える．問題になっているのは, この J^* の, $\Delta \times \Delta$ 上の部分コンパクト化 $\overline{J}$ である.

まず最も素直な fan からできる log Néron model を $\overline{J}_0$ とする．この空間の special fiber は全て $\mathbf{C}^\times$ であり, $s_1 s_2 \to 0$ のとき $\mathbf{C}^\times/(s_1 s_2)^{\mathbf{Z}}$ の極限として自然に $\mathbf{C}^\times$ が現れる恰好になる．所が関数 s_1/s_2 は, 原点 $(0,0)$ への近づき方によって, 異なる値に収束してしまうから, この $\overline{J}_0$ には, 先の ν は延びない.

しかしここで, J の群演算を利用して, 別の部分コンパクト化

$$J \overset{1/\nu 倍}{\simeq} J \hookrightarrow \overline{J}_0$$

を考え, これを $J \hookrightarrow \overline{J}_\nu$ とすると, 0-section（= 1 という定数 section）は $\overline{J}_0$ に自明に延びるから, ν は, $\overline{J}_\nu$ に延びる. これが, 命題 1 の与えるところの log Néron model であり, ν に依存する.

次に同じ設定で, ν と 0（0-section）とが同時に graph できるかを考えると, このままではできないが, base を blow up すれば $\nu = [s_1]$ としてよくなる. このとき, $\overline{J}_\nu$ と $\overline{J}_0$ とを原点の fiber 以外で貼り合わせた空間を考えると, これは, ν と 0 とを同時に graph する. 原点での fiber は 2 つの $\mathbf{C}^\times$ の disjoint union であり, 他の special fiber は $\mathbf{C}^\times$ である. これが, 命題 2 の与えるところの log Néron model である.

7 主定理の別証明

Kato–Usui による log Hodge 理論は, 重み 2 以上の PHS の分類空間の部分コンパクト化について殆ど結果がなかった所に現れた. 前節の例からもわかるように, 具体的な問題への応用においては (weak) fan を作る問題が残ることは, 当初から認識されていた（cf. [10] 12.6–12.7）.

しかし問題によっては fan を作ることを回避できる. 実際, 主定理は $\Gamma \setminus D_{\mathrm{val},(\Gamma)}$ という空間を考えると, 6 節最初の方針で証明できてしまう. ここで $\Gamma \setminus D_{\mathrm{val},(\Gamma)}$ は, fan の代わりに, 全ての cone を考慮して定義したもので, $\Gamma \setminus D_\Sigma$ の Σ を走らせた逆極限のようなものである. S_{val} を S の blow up 達の逆極限とすると, ν には依存しない図式

$$\begin{array}{ccc} J(H) & \hookrightarrow & \Gamma \setminus D_{\mathrm{val},(\Gamma)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^* & \hookrightarrow & S_{\mathrm{val}} \end{array}$$

があり, 右の縦の射はどんな ν をも graph できる. 従って 6 節最初と同様の議論により $\{\nu = 0\}$ は S_{val} で代数的となり, これから S での代数性が従う. 実際には技術的な問題がいくつかあるが, 大要以上のような議論で, 主定理の, 短い証明を与えることができる（[7]）.

最後に, 以上は log mixed Hodge theory の一般的な枠組みだけを用いて議論しているので, 全く同じ証明で, 主定理を次のように, 任意個数の任意の Hodge 型の任意の LMH の場合に一般化することもできる（[7]）:

定理. *S, S^* を主定理の通りとする. Hodge data を任意とする. Smooth な代数多様体 S^* 上の AVMHS $H_1, \cdots, H_n$ に対し, 集合 $\{H_1 = \cdots = H_n\} \subset S^*$ は代数的である.*

References

[1] P. Brosnan and G. Pearlstein, On the algebraicity of the zero locus of an admissible normal function, preprint.

[2] P. Brosnan, G. Pearlstein and M. Saito, A generalization of the Néron models of Green, Griffiths and Kerr, preprint.

[3] M. Green and P. Griffiths, Algebraic cycles and singularities of normal functions, in "Algebraic Cycles and Motives, Volume 1" (Ed., J. Nagel and C. Peters), London Mathematical Society Lecture Note Series 343, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[4] M. Green, P. Griffiths and M. Kerr, Néron models and limits of Abel-Jacobi mappings, Compositio Mathematica 146 (2010), 288–366.

[5] K. Kato and C. Nakayama, Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over **C**, Kodai Math. J. 22 (1999), 161–186.

[6] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, SL(2)-orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, J. Algebraic Geometry 17 (2008), 401–479.

[7] ———, Analyticity of the closures of some Hodge theoretic subspaces, Proc. Japan Academy Ser. A Math. Sci. 87-A-9 (2011), 167–172.

[8] ———, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits, J. Algebraic Geometry 22 (2013), 671–772.

[9] ———, Néron models for admissible normal functions, preprint, submitted.

[10] K. Kato and S. Usui, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. of Math. Stud. 169, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009.

[11] D. R. Morrison, J. Walcher, D-branes and normal functions, Advances in Theoretical and Mathematical Physics 13 (2009), 553–598.

[12] C. Nakayama, Log Néron models over surfaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 19 (2012), 613–659.

[13] ———, Log Néron models over surfaces, II, preprint, submitted.

[14] C. Nakayama and A. Ogus, Relative rounding in toric and logarithmic geometry, Geometry and Topology 14 (2010), 2189–2241.

[15] H. Poincaré, Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques, Ann. Sci. ENS (série 3) 27 (1910), 55–108.

[16] M. Saito, Admissible normal functions, J. Algebraic Geometry 5 (1996), 235–276.

[17] C. Schnell, Complex analytic Néron models for arbitrary families of intermediate Jacobians, Invent. Math. 188 (2012), 1–81.