Toric modification of cyclic orbifolds and extended Zagier reciprocity for Dedekind sum *

足利　正（東北学院大学工学部）

§1. 序論

1880 年代, Dedekind は彼の著名なエータ関数 $\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi im\tau}\right)$ への $SL_2(\mathbf{Z})$ 作用を明示的に書き下すため, Dedekind 和

$$s(a;d)=\sum_{k=1}^{d-1}\left(\left(\frac{k}{d}\right)\right)\left(\left(\frac{ka}{d}\right)\right)$$

を導入した。ここに d,a は互いに素な自然数であり, また $((x))=x-[x]-1/2$ $(x\notin\mathbf{Z})$, $((x))=0$ $(x\in\mathbf{Z})$ である。彼は同時に現在「2 次元非斉次型」と分類される古典的な相互律

$$s(a;d)+s(d;a)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{a}{d}+\frac{a}{d}+\frac{1}{da}\right)\tag{1}$$

を証明した。その後, Rademacher は $s(a_1,a_2;d)=\sum_{k=1}^{d-1}\left(\left(\frac{a_1k}{d}\right)\right)\left(\left(\frac{ka_2}{d}\right)\right)$ なる形の Dedekind 和に関して (1) の拡張になる「2 次元斉次型」の相互律を示した。その際 Fourier 展開によって Dedekind 和を

$$s(a_1,a_2;d)=\frac{1}{4d}\sum_{k=1}^{d-1}\cot\frac{\pi a_1k}{d}\cot\frac{\pi a_2k}{d}\tag{2}$$

と書き表した。1970 年代に入り Hirzebruch-Zagier [HZ], Zagier [Z] は (2) の形の高次元版として, 任意の正偶数 n に対して

$$s(a_1,\cdots,a_n;d)=\frac{(-1)^{n/2}}{d}\sum_{k=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{n}\cot\left(\frac{\pi ka_i}{d}\right)\tag{3}$$

*本稿は約 3 ヶ月前に執筆した解説記事「Dedekind 和に関する Zagier 相互律の幾何的拡張」(2012 年 Riemann 面に関連する位相幾何学研究集会予稿集）を改訂・加筆して作成した。そのため同記事と重複している部分が多いがご容赦願いたい。

なる形の Dedekind 和を考察した。特に Zagier はその相互律として「互いに素な自然数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に対する」等式

$$\sum_{i=0}^{n} s(a_0, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n; a_i) = 1 - \frac{L_n(a_0, \cdots, a_n)}{\prod_{i=0}^{n} a_i} \tag{4}$$

を得た (n 次元斉次型)。右辺にあるのは Hirzebruch の L 多項式, つまり $L_n(a_0, \cdots, a_n) = \kappa_n \left(\prod_{i=0}^{n} a_i t \coth a_i t \right)$ である。(ここに 記号 κ_n は変数 t に関する n 次の係数を意味する。) 彼はその証明として, 留数定理を用いる解析的なものと, 符号数定理を用いる位相幾何的なものの 2 種類を提示している。

ここで位相幾何的アプローチがなぜ可能かは, 式 (3) が Atiyah-Bott による符号数作用素に関する Lefschetz 固定点公式の孤立固定点寄与そのものだからである。なおこれを思えば, 符号数作用素以外の Dirac 作用素についても同種の相互律の存在が想起される。例えば Fukumoto-Furuta-Ue [FFU], Fukumoto [Fuk] 等を参照されたい。(ただしこれらの仕事は固定点公式を一部にのみ用いるずっと広いものである。)

一方, 代数幾何的観点からは明示的な orbifold Riemann-Roch の定式化に「Todd defect 型 Dedekind 和」を用いようというアイデアが Reid [R] Chap.III により 1987 年に提唱され, その線に沿って今日も発展している (Buckley-Reid-Zhou [BRZ] 等)。

解析数論の主要な流れにもどると, 2000 年以降 Beck [B] による cotangent 関数の高階微分を取り込んだ Dedekind 和

$$s(a_1, \cdots, a_n; m_1, \cdots, m_n; d; m_0) = \frac{1}{d^{m_0+1}} \sum_{k=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{n} \cot^{(m_i)} \left(\frac{\pi k a_i}{d} \right)$$

が現れた。ここに $\cot^{(m)} x = (d^m/dx^m)(\cot x)$ である。その相互律は [B] 及び Bayad-Raouj [BR] で研究された。

またこれらを踏まえ, 最近では関数体版や標数 p 版の Dedekind 和の概念も現れ, その相互律も Bayad-Hamahata [BH1] [BH2], Okada [Okad], Hamahata [Ha] 等により研究されている。

さて本稿では Zagier 相互律 (4) を一歩進め, (4) が成立する前提である「$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 達が互いに素である」という条件をはずした形でも, 我々の方法である形の相互律が得られることを報告したい。

なお (4) に限らず先に紹介した相互律はすべて (4) と同じか, もしくはそれと同等の「対称性」を前提としているように思われる。本稿では「 a_0 は残りの $a_1, \cdots, a_n$ 達と互いに素であるが, $a_1, \cdots, a_n$ 達どおしは一般にそうではない」と仮定する。これは我々の

用語では絶対既約ではない既約 n 次元真分数 $(a_1, \cdots, a_n)/a_0$ から出発するということにあたる。このように「対称性の乱れ」のある条件下でも, 以下のことが成り立つ。

すなわち通常の cotangent 関数を Atiyah-Singer cotangent 関数で置き換えて (3) と同じ形式で Dedekind 和を定義しておき, 添字 i を順番に動かして通常のように a_i で割って足す換わりに「 高次元真分数の第 i 次剰余写像」で順番に送りながら足すという風に解釈すると, 形式的には (4) と全く同じ相互律が成り立つ (Theorem 3.2)。これは Zagier 相互律を「非斉次なもの」に制限した式の拡張となっている (Corollary 3.3)。

ここで Atiyah-Singer cotangent 関数とは, 通常の cotangent 積を定数部分（古典項）に持つある有理型関数であって, その意味で「cotangent 積の量子拡張」とでも呼ぶべきものである。その係数は (9) のように cotangent の高階微分とベルヌーイ数を用いて明示的に書ける。そのため先に述べた [B], [BR] 等の解析的方法とも関係しているように思われるが, 詳細は不明である。

この関数の由来は, Atiyah-Singer の同変 L 類の「非孤立」固定点跡が寄与する項の, 固定点跡の法束のデータが入る所を変数に置き換えたものである。ただし我々はこれをある特殊な状況下で用いるため, それにあわせてオリジナルな形からは少し変形してある。この変数部分を「重み」と考え, 一旦「重み付き Dedekind 和」を定義しておく。そして実際の相互律では, ここに高次元分数の「シフトされた分子」(式 (7)) を代入し, 我々の設定する幾何的状況でのオービフォールド法束のデータを復元するという仕掛けである。以上のようにこの種の問題は, 位相幾何的には非孤立な場合の Lefschetz 固定点公式と密接に関係している。

さて本稿の構成であるが, 先ほど粗く述べた結果の部分を, 次節でもう一度一番最初の定義からはじめて丁寧に例を交えながら英文で書かせていただくのみとした。証明の詳細については割愛せざるを得ないが, その方針のみ記すと以下の手順で行われる。

(i) すでに少し触れたが, 小学校で習う真分数（分子が分母より小さな分数）を $n = 1$ の場合に含む n 次元真分数の概念を定義しておく。さらに通常の割り算をやはり高次元化した n 次元真分数の集合間の「第 i 次剰余写像」($1 \leq i \leq n$) や, 既約真分数の概念も定義しておく（この部分のみは §2 で解説する)。

(ii) 半ユニモジュラー錐と呼ばれる n 次元単体的錐を考える。この錐はその境界を含む内部に Oka center と呼ばれる特別な点（実際は対応する原始ベクトル）及びその点の有する n 次元真分数を持つ。この錐からトーラス埋め込みを作ると, その原点の芽がちょう

なお 2011 年に執筆した解説記事 [A4] の中に, 今回の議論の原型となった絶対既約な真分数に対する Zagier 相互律のトーリック幾何を用いる別証明のアイデアを記したので参照されたい。

どこの真分数の型に一致する巡回商特異点のアフィン近傍となる。

(iii) Oka center が既約分数である半ユニモジュラー錐のトーラス埋め込み X から出発し, それを [Ok] の方法で細分して得られるトーラス埋め込みを Y とする。Y の錐は 1 個の非特異錐と $n-1$ 個の半ユニモジュラー錐からなるが, この新しい半ユニモジュラー錐達の Oka centers の持つ真分数はもとの真分数の剰余写像による像に一致する。X は孤立であるが Y は一般に非孤立巡回商特異点を持つ。なお得られるトーリック双有理正則写像 $\mu : Y \to X$ は, Fujiki の解消プロセス構成の鍵となった写像 ([Fuj] Lemma 3) のトーリック的翻訳に他ならない。

(iv) 写像 μ は射影的単体的な同時コンパクト化 $\overline{\mu} : \overline{Y} \to \overline{X}$ を持つ。この部分の証明は, ある連立 1 次不等式の有理解の存在を示してトーリック中井判定法に帰着させる。特に $\overline{X}, \overline{Y}$ は共に複素オービフォールドである。

(v) 一般に偶数次元複素オービフォールド M に対しては, 有理ホモロジー多様体としての符号数 $\mathrm{Sign}\, M$, オービフォールド L 類の積分として定義されるオービフォールド符号数 $\mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, M$ 並びにその差として定義される符号不足数 $\mathrm{Sdef}\, M = \mathrm{Sign}\, M - \mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, M$ の 3 種の不変量が定義される。従ってトーリック写像 $\overline{\mu}$ にもどれば

$$(\mathrm{Sign}\, \overline{Y} - \mathrm{Sign}\, \overline{X}) - (\mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, \overline{Y} - \mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, \overline{X}) = \mathrm{Sdef}\, \overline{Y} - \mathrm{Sdef}\, \overline{X} \tag{5}$$

となる。これを具体的に計算すると, まさに我々の相互律になることを以下の手順で示す。

(vi) まず符号数に関しては非特異な場合に知られている組み合わせ的公式 [Od] Theorem 3.12 が, 射影的且つ単体的トーリック多様体に対しても成り立つことが示せる。それには非特異な場合に用いられる Kahler 形式を ample 因子の第 1 Chern 類に置き換えつつ Steenbrink [St] の偏極 Hodge 構造と Ishida 複体 [I] を組み合わせればよい。これにより $\mathrm{Sign}\, \overline{Y} - \mathrm{Sign}\, \overline{X}$ は容易に求まる。

(vii) 次に Oka 細分に伴う有理 Chow 環の変動部分が, Pommersheim [P] にある相対 Jurkiewicz-Danilov 公式を用いて記述できる。これからオービフォールド L 類の変動項の具体的記述が可能になり $\mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, \overline{Y} - \mathrm{Sign}^{\mathrm{orb}}\, \overline{X}$ が求まる。

(viii) 最後の符号不足数であるが, Kawasaki [Ka] の定理によれば, 原理的にはオービフォールドとしての特異点跡のリフトとなってるストラティファイド・オービフォールド (或は最近の Chen-Ruan の言葉では twisted sector) 上, Atiyah-Singer 同変 L 類を張り合わせ

[St] の議論中の強 Lefschetz 定理の証明部分に不明箇所のあることが後日斉藤盛彦氏により指摘されたが, 単体的トーリックの場合は Goresky-MacPherson 及び Beilinson-Bernstein-Deligne の定理を用いて回復できる。このことについては [CLS] p.620, p.794 を参照されたい。

た特性類を積分して求められる。我々の状況では, この特異点跡はトーラス不変部分多様体のなすストラティフィケーションの一部分であり, オービフォールド法束への群作用の明示的な記述も可能であるため, この計算が実際に実行できる。こうして $\mathrm{Sdef}\,\overline{Y} - \mathrm{Sdef}\,\overline{X}$ も求まる。

以上極言すれば, 等式 (5) そのものを相互律の「幾何学的実態」と見ることができる！詳細は本論文 [A2] を参照されたい。

§2. Results and Examples

1. Let $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ the set of natural numbers and integers respectively. We call

$$\frac{\mathbf{a}}{d} = \frac{(a_1, \cdots, a_n)}{d} \tag{6}$$

an *n-dimensional proper fraction* ($n \geq 1$) iff $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ and $d \in \mathbf{N}$ which satisfies $0 \leq a_i \leq d-1$ for $1 \leq i \leq n$. Here we call $\mathbf{a}$ and d the *numerator* and the *denominator* of $\mathbf{a}/d$ respectively, and call a_i the *i-th component* of the numerator. The prototype of this notion comes from Reid [R].

Let $\mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ be the set of n-dimensional proper fractions, and let $\overline{\mathbf{Q}}_n^{\mathrm{prop}}$ be the set of union of $\mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ and the symbol ∞. Similarly we set $\overline{\mathbf{Z}}^n = \mathbf{Z}^n \cup \{\infty\}$. If the n-th component of the numerator satisfies $a_n = 1$, then $\mathbf{a}/d$ is called *inhomogeneous*. If $\mathbf{a}/d \in \mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ satisfies

$$\gcd(d, a_i) = 1 \quad (1 \leq i \leq n),$$

it is called *irreducible*. Moreover an irreducible proper fraction $\mathbf{a}/d$ satisfying

$$\gcd(a_i, a_j) = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

is called *absolutely irreducible*. The multiple of $\mathbf{a}/d$ by $k \in \mathbf{Z}$ is defined by

$$k \cdot \frac{\mathbf{a}}{d} = \frac{(\overline{ka_1}, \cdots, \overline{ka_n})}{d} \in \mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$$

where $\overline{ka_i} \equiv ka_i \pmod{d}$ with $0 \leq \overline{ka_i} \leq d-1$. (See [R] p. 372). We sometimes write the numerator of $\mathbf{a}/d$ by $\mathbf{a} = \mathrm{Num}(\mathbf{a}/d)$. On the other hand, the *i-th shifted numerator* of $\mathbf{a}/d$ is defined by

$$N_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, -d, a_{i+1}, \cdots, a_n) \in \mathbf{Z}^n. \tag{7}$$

Now we define an analogue for $\mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ of the classical Euclidian algorithm as follows:

DEFINITION 1.1 (i) *For $1 \le i \le n$, the i-th round down map $Z_i : \overline{\mathbf{Q}}_n^{\mathrm{prop}} \to \overline{\mathbf{Z}}^n$ is define by*

$$Z_i\left(\frac{(a_1,\cdots,a_n)}{d}\right) = \begin{cases} \left(\left\lfloor \frac{a_1}{a_i} \right\rfloor, \cdots, \left\lfloor \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{-d}{a_i} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{a_{i+1}}{a_i} \right\rfloor, \cdots, \left\lfloor \frac{a_n}{a_i} \right\rfloor\right) & \text{if } a_i \neq 0 \\ \infty & \text{if } a_i = 0 \end{cases}$$

and $Z_i(\infty) = \infty$. Here $\lfloor x \rfloor$ is the greatest integer not exceeding x.

(ii) *The i-*th remainder map $R_i : \overline{\mathbf{Q}}_n^{\mathrm{prop}} \to \overline{\mathbf{Q}}_n^{\mathrm{prop}}$ *is define by*

$$R_i\left(\frac{(a_1,\cdots,a_n)}{d}\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(\overline{a_1},\cdots,\overline{a_{i-1}},\overline{(-d)},\overline{a_{i+1}},\cdots,\overline{a_n}\right)}{a_i} & \text{if } a_i \neq 0 \\ \infty & \text{if } a_i = 0. \end{cases}$$

and $R_i(\infty) = \infty$.

For instance, if $\alpha = (2,6,3,1)/7$, then $Z_3(\alpha) = (0,2,-3,0)$ and $R_3(\alpha) = (2,0,2,1)/3$. In the usual addition on $\mathbf{Z}^n$, we have

$$\mathrm{Num}(R_i(\mathbf{a}/d)) + a_i Z_i(\mathbf{a}/d) = N_i(\mathbf{a}/d), \quad \text{if } a_i \neq 0. \tag{8}$$

Applications of the iteration of this algorithm will be discussed in [A3].

2. We set $\mathrm{I} = \{1,2,\cdots,n\}$. For $\mathbf{a}/d \in \mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ as in (6), we write I as the disjoint union $\mathrm{I}_0(\mathbf{a}/d) \coprod \mathrm{I}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{a}/d) \coprod \mathrm{I}_*(\mathbf{a}/d)$ where

$$\mathrm{I}_0(\mathbf{a}/d) = \{i \in \mathrm{I} | a_i = 0\},\ \mathrm{I}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{a}/d) = \left\{i \in \mathrm{I} \mid \frac{a_i}{d} = \frac{1}{2}\right\},\ \mathrm{I}_*(\mathbf{a}/d) = \mathrm{I} \backslash \left(\mathrm{I}_0(\mathbf{a}/d) \coprod \mathrm{I}_{\mathrm{ref}}(\mathbf{a}/d)\right).$$

When we discuss by fixing $\mathbf{a}/d$, we sometimes write $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0(\mathbf{a}/d)$ and so on if there is no confusion. We denote by $|\mathrm{I}_0|$ the cardinarity of I_0 and so on.

For a Laurant series $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{-\infty < i_1,\cdots,i_n < \infty} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ of the variables $x_1,\cdots,x_n$ with rational coefficients, we denote by

$$\kappa_m\left(f(x_1,\cdots,x_n)\right) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=m} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \qquad (m \in \mathbf{Z})$$

the homogeneous degree m part. For simplicity, we write $\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_n)$.

DEFINITION 2.1 *For $\mathbf{a}/d \in \mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$, the Atiyah-Singer cotangent function* $\cot(\mathbf{a}/d)(\mathbf{x})$ *is the meromorphic function defined by*

$$\frac{(-1)^n \cdot 2^{|\mathrm{I}_0| - |\mathrm{I}_{\mathrm{ref}}|}}{d(|\mathrm{I}_0|+1)\left(\prod_{k\in\mathrm{I}_0} x_k\right)} \cdot \kappa_{|\mathrm{I}_0|}\left\{\prod_{k\in\mathrm{I}_*} \coth\left(\frac{x_k}{2} + \frac{\sqrt{-1}\pi a_k}{d}\right) \prod_{k\in\mathrm{I}_0} \frac{x_k}{2} \coth\frac{x_k}{2} \prod_{k\in\mathrm{I}_{\mathrm{ref}}} 2\tanh\frac{x_k}{2}\right\}.$$

This function appear as an interpretation to our situation of Atiyah-Singer's equivariant L-class ([AS] p. 582). Taylor expansion says $(-1)^n 2^{|\mathrm{I}_{\mathrm{ref}}|-|\mathrm{I}_0|} d(|\mathrm{I}_0|+1)\left(\prod_{k\in \mathrm{I}_0} x_k\right)\cot(\mathbf{a}/d)(\mathbf{x})$ is the homogeneous degree $|\mathrm{I}_0|$ part of

$$\prod_{k\in \mathrm{I}_*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\sqrt{-1})^{j+1}}{j!\,2^j}\cot^{(j)}\left(\frac{\pi a_k}{d}\right)x_k^j\cdot\prod_{k\in \mathrm{I}_0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}x_k^{2j}\cdot\prod_{k\in \mathrm{I}_{\mathrm{ref}}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{4(2^{2j}-1)B_{2j}}{(2j)!}x_k^{2j-1} \quad (9)$$

where B_{2j} are the 2j-th Bernoulli numbers $B_0 = 1, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30\cdots$, and $\cot^{(j)} x = (d^j/dx^j)(\cot x)$ (see e.g. [B] for the notation). Therefore Atiyah-Singer cotangent function is essentially written by using the derivatives of usual cotangent function.

Example 2.2 Assume n is even and $\mathrm{I}_0(\mathbf{a}/d)=\emptyset$. Then $\cot(\mathbf{a}/d)(\mathbf{x})$ is the constant function

$$\cot\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{n/2}}{d}\prod_{k=1}^{n}\cot\left(\frac{\pi a_k}{d}\right).$$

Example 2.3 Asssume $\mathbf{a}/d = (a_1, a_2, 0, 0)/d \in \mathbf{Q}_4^{\mathrm{prop}}$ with $d \geq 3$, $\gcd(d, a_1) = \gcd(d, a_2) = 1$. Then

$$\cot\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{18dx_3x_4}\left(3x_1^2\cot^{(2)}\frac{\pi a_1}{d}\cot\frac{\pi a_2}{d} + 6x_1x_2\cot^{(1)}\frac{\pi a_1}{d}\cot^{(1)}\frac{\pi a_2}{d}\right.$$
$$\left.+3x_2^2\cot\frac{\pi a_1}{d}\cot^{(2)}\frac{\pi a_2}{d} - 2(x_3^2+x_4^2)\cot\frac{\pi a_1}{d}\cot\frac{\pi a_2}{d}\right).$$

3. From now on, we assume that n is an even natural number.

Definition 3.1 *For $\mathbf{a}/d \in \mathbf{Q}_n^{\mathrm{prop}}$ and an element $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbf{Z}^n$, we define the Dedekind sum of $\mathbf{a}/d$ with weight $\mathbf{w}$ by*

$$\mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}, \mathbf{w}\right) = \sum_{k=1}^{d-1}\cot\left(k\cdot\frac{\mathbf{a}}{d}\right)(\mathbf{w}).$$

If $\mathbf{a}/d$ is irreducible, then $k\cdot\mathbf{a}/d$ is also irreducible for $1 \leq k \leq d-1$. In this case, Example 2.2 says that

$$\mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}, \mathbf{w}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{d}\cdot\sum_{k=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{n}\cot\frac{\pi a_i k}{d} \quad (10)$$

independently on the weight $\mathbf{w}$, which we simply write $\mathbf{s}(\mathbf{a}/d)$. The definition (10) for an irreducible fraction $\mathbf{a}/d$ is essentially nothing but the Dedekind sum defined by Hirzebruch-Zagier [HZ]. In this sense, the notion of Dedekind sum with weight is a generalization of the one in [HZ]. Now let

$$L_n(x_1, \cdots, x_r) = \kappa_n \left(\prod_{i=1}^{r} x_i \coth x_i \right)$$

be the Hirzebruch L-polynomial with variables $x_1, \cdots, x_r$. The following theorem is our main result.

THEOREM 3.2 (Reciprocity law) *Let* $\mathbf{a}/d = (a_1, \cdots .a_{n-1}, 1)/d \in \mathbf{Q}_n^{\text{prop}}$ *be an irreducible inhomogeneous element. Then we have*

$$\mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{s}\left(R_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right), N_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)\right) = 1 - \frac{L_n(d, a_1, \cdots, a_{n-1}, 1)}{d \prod_{i=1}^{n-1} a_i}. \tag{11}$$

If $\mathbf{a}/d$ is absolutely irreducible, then $R_i(\mathbf{a}/d)$ is also (absolutely) irreducible for any i. Therefore Theorem 3.2 implies the following:

COROLLARY 3.3 *If* $\mathbf{a}/d = (a_1, \cdots .a_{n-1}, 1)/d \in \mathbf{Q}_n^{\text{prop}}$ *is an absolutely irreducible inhomogeneous element, then*

$$\mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{s}\left(R_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)\right) = 1 - \frac{L_n(d, a_1, \cdots, a_{n-1}, 1)}{d \prod_{i=1}^{n-1} a_i}. \tag{12}$$

Easy check says that Corollary 3.3 coincides with the inhomogeneous Zagier reciprocity. Namely if we put $a_n = 1$ in the formula (47) in [Z] p.158, then it coincides with (12). In this sense, the formula (11) is a generalization of inhomogeneous Zagier reciprocity.

EXAMPLE 3.4 Asuume $\mathbf{a}/d = (a_1, a_2, a_3, a_4)/d \in \mathbf{Q}_4^{\text{prop}}$ where $a_4 = 1, \gcd(d, a_i) = 1$ ($1 \leq i \leq 3$) and $d \geq 3$ is odd. Then

$$\mathbf{s}\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right) - \sum_{i=1}^{3} \mathbf{s}\left(R_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right), N_i\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)\right) = 1 - \frac{1}{45d \prod_{i=1}^{4} a_i} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} 15 a_i^2 a_j^2 - \sum_{i=1}^{4} a_i^4 \right).$$

Here by putting $c_{1i} = \gcd(a_1, a_i)$ $(i = 2, 3), c_{123} = \gcd(a_1, a_2, a_3)$ and $d' = -d$, we have

$$\mathbf{s}\left(R_1\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right), N_1\left(\frac{\mathbf{a}}{d}\right)\right) = \frac{1}{a_1} \sum_{1 \leq k \leq a_1 - 1}{}' \cot \frac{\pi d' k}{a_1} \cot \frac{\pi a_2 k}{a_1} \cot \frac{\pi a_3 k}{a_1} \cot \frac{\pi k}{a_1}$$

$$+\sum_{i=2}^{3}\frac{1}{2a_1a_i}\sum_{1\le k\le c_{1i}-1}{}' \left(d'\cot^{(1)}\frac{\pi d'k}{c_{1i}}\cot\frac{\pi a_{i^*}k}{c_{1i}}\cot\frac{\pi k}{c_{1i}}+a_{i^*}\cot\frac{\pi d'k}{c_{1i}}\cot^{(1)}\frac{\pi a_{i^*}k}{c_{1i}}\cot\frac{\pi k}{c_{1i}}\right.$$

$$\left.+\cot\frac{\pi d'k}{c_{1i}}\cot\frac{\pi a_{i^*}k}{c_{1i}}\cot^{(1)}\frac{\pi k}{c_{1i}}\right)+\frac{1}{18a_1a_2a_3}\sum_{k=1}^{c_{123}-1}\left\{3d'^2\cot^{(2)}\frac{\pi d'k}{c_{123}}\cot\frac{\pi k}{c_{123}}\right.$$

$$\left.+6d'\cot^{(1)}\frac{\pi d'k}{c_{123}}\cot^{(1)}\frac{\pi k}{c_{123}}+3\cot\frac{\pi d'k}{c_{123}}\cot^{(2)}\frac{\pi k}{c_{123}}-2(a_2^2+a_3^2)\cot\frac{\pi d'k}{c_{123}}\cot\frac{\pi k}{c_{123}}\right\}.$$

In the first summation, k moves from 1 to a_1-1 such that $(\alpha k)/a_1 \notin \mathbf{Z}$ for $\alpha = a_2, a_3$. In the second summation, the suffix i^* is determined by $2^*=3$ and $3^*=2$, and k moves from 1 to $c_{1i}-1$ such that $(a_{i*}k)/c_{1i} \notin \mathbf{Z}$.

The terms $\mathbf{s}(R_i(\mathbf{a}/d), N_i(\mathbf{a}/d))$ for $i=2,3$ are similar.

蛇足　ここ十年以上, 筆者は代数曲線の退化族のファイバー芽の局所符号数関連の研究に携わりましたが, そのテーマと Dedekind 和とがどう関わるかという事などを含め, 若干の点を補足させて下さい。我々の方法でこの局所符号数を表すと

$$\text{「安定曲線のモジュライ上の符号数因子の引き戻し」}+\text{「局所符号不足数」} \tag{13}$$

となります。このあとこの不変量を「Horikawa 指数」に止揚したいのです (cf. [A5])。この量は一般型曲面の地誌学 (geography) の「局所化」から来る量であるため,「正値性」が要求されます。局所符号数を Horikawa 指数となるべき量に形式的に変形するのは難しくないのですが, 問題はその下限評価です。式 (13) の評価の困難性は, ほぼ局所符号不足数のそれに集中しているのですが, この量の実態は「Dedekind 和の組み合わせ」です ([A1] §§4,5)。すなわち本質的には位相モノドロミーの持つ total valency と screw 数にわたって Dedekind 和を足しあげたものです。

さて筆者は最近 Dedekind 和方面の文献を少しずつ調べるようになりましたが, 近年のこの分野の発展と研究者層の広がりに正直驚いています。特に相互律や Dedekind 和間の関係式, 絶対値の上限評価などのテーマは古典 (2 次元) Dedekind 和, 高次元 Dedekind 和共に人気があるようです。我々の問題にも応用が広がることが期待できます。

ついでながら, 筆者は孤立 2 次元特異点の地誌学の問題, 特にミルナー数と幾何種数の関係を問う Durfee 予想というものにも惹かれてきました。ここにも Dedekind 和が自然に登場します。これのアプローチとして考えられるのが, 不変量の変動項が追えるくらいのできる限り良い特異点解消プロセスを探すということです。筆者はある時, 特異点を埋め込んだ外空間の modification から誘導する埋め込み解消 (embedded resolution) のプロセスをもう一度工夫してみようと思い立ち, ずっと以前に読んで長く忘れていた岡睦雄

さんのトーリック modification の方法 [Ok] を再考してみる気になりました。ただこの初期の目的には現在遠く及ばない状態です。しかしながらこの方法は, Pommersheim [P] (1993 年）がトーリック幾何と古典 Dedekind 和の関係をはじめてつけ, それ以降手つかずになっていたようにも思える「道筋」を進展させる鍵になると感じ始めました。今回の話はこのようなキッカケで生まれました。

なお文献について浜畑芳紀さんに有益な助言をいただきました。彼に感謝致します。

参考文献

[A1] T. Ashikaga, Local signature defect of fibered surfaces via monodromy and stable reduction, Comment. Math. Helv. **85** (2010), 417–461.

[A2] T. Ashikaga, Toric modification of cyclic orbifolds and higer-dimensional Dedekind sums with weight, Preprint.

[A3] T. Ashikaga, Higer-dimensional continued linear fraction for cyclic orbiolds and Dedekind sums, in preparation.

[A4] T. Ashikaga, 巡回商特異点に伴う高次元連分数と Zagier 相互律, 「リーマン面に関連する位相幾何学 2011」研究集会予稿集, pp. 4–15.

[A5] T. Ashikaga, ファイバー曲面の局所符号数とその応用 II, 2009 年代数幾何学シンポジューム記録, pp.97–110.

[AS] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.

[BH1] A. Bayad and Y. Hamahata, Higher dimensional Dedekind sums in function fields, Acta. Arith. **152** (2012) no.1, 71–80.

[BH2] A. Bayad and Y. Hamahata, Multiple Dedekind-Rademacher sums in function fields, Preprint.

[BR] A. Bayad and A. Raouj, Arithmetic of higher-dimensional Dedekind-Rademacher sums, J. Number Theory **132** (2012), 332–347.

[B] M. Beck, Dedekind cotangent sums, Acta Arith. **109** (2003) no.2, 109–130.

[BRZ] A. Buckley, M. Reid and S. Zhou, Orbifold Riemann-Roch and Hilbert series, Preprint.

[CLS] A. Cox, B. Little and H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate St. Math. **124**, Amer. Math. Soc., 2011.

[Fuj] A. Fujiki, On resolution of cyclic quotient singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 10 (1974/75), 293–328.

[Fuk] Y. Fukumoto, The index of the *spin*^{c} Dirac operator on the weighted projective space and the reciprocity law of the Fourier -Dedekind sum, J. Math. Anal. Appl. **309** (2005), 674–685.

[FFU] Y. Fukumoto, M. Furuta and M Ue, W-invariants and Neumann-Siebenmann invariants for Seifert homology 3-sheres, Topology and its Appl. **116** (2001), 333-369.

[Ha] Y. Hamahata, Dedekind sums in finite characteristic, Proc. Japan Acad. **84**(2008), 89-92.

[HZ] F. Hirzebruch and D. B. Zagier, *The Atiyah-Singer index theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, Wilmington, 1974.

[I] M. N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. **32** (1980), 111–146.

[Ka] T. Kawasaki, The signature theorem for V-manifolds, Topology **17** (1978), 75–83.

[Od] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1988.

[Ok] M. Oka, On the resolution of hypersurface singularities, Adv. St. Pure Math. 8 (1986), 405–436.

[Okad] S. Okada, Analogies of Dedekind sums in function field, J. Number Theory **130** (2010), 1750–1762.

[P] J.E.Pommersheim, Toric varieties, lattice points and Dedekind sums, Math. Ann. 295 (1993), 1–24.

[St] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, Nordic Summer School/NAVF Symposium in Math. Oslo, August (1976), 5–25.

[R] M. Reid, Young Person's guide to canonical singularities, Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Part 1, AMS, Providence, R.I. (1987) 345–414.

[Z] D. Zagier, Higher dimensional Dedekind sum, Math. Ann. **202** (1973), 149–172.