有限軌道を持つ多重旗多様体について

Finiteness of orbits on multiple flag varieties

西山享 *) (青山学院大学・理工学部)

KYO NISHIYAMA

概要. 簡約代数群 G の部分旗多様体とその対称部分群 K の部分旗多様体の直積を考える。これを対称対の二重旗多様体と呼ぶ [NO11]。対称対の二重旗多様体は、群 G の三重旗多様体の一般化であり、K 軌道が有限であれば Steinberg 理論の類似や、モーメント写像の像としての冪零多様体を考えることができる。また表現論的には、球多様体や重複度自由な作用と密接に関係もしている。

この報告では、まず対称対の二重旗多様体を導入し、その基本的な性質や、三重旗多様体との関係、軌道の有限性について解説する。最近の研究では、軌道の有限性だけでなく、軌道の分類についても研究が大きく進展しつつある。分類の背後には Bruhat 分解と KGB 理論が潜んでおり、組合せ論的にも面白いと思われる。この軌道の分類と、それから従う軌道の有限性に関する条件を解説した後、モーメント写像と Steinberg 多様体への入門的解説を行う。

この報告の内容は Xuhua He 氏 (香港科技大學)、Lucas Fresse 氏 (Cergy-Pontoise 大学) および落合啓之氏 (九州大学) との共同研究に基づく。紙数の関係上ここでは紹介できなかったが、谷口健二・近藤健介両氏 (青山学院大学) との共同研究も本報告と関係が深い。これらの共同研究については [NO11], [Och11], [Nis11], [Kon11] でも紹介されているので、参照していただきたい。

1. 多重旗多様体

1.1. **旗多様体.** G を連結な簡約代数群とする。以下の議論では、G を標数ゼロの代数閉体上で考えれば十分であるが、この報告では複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えることにする。特に断らない限り、以下現れる代数群はすべて複素数体上の代数群である。

B を G の Borel 部分群とする。Borel 部分群は G の極大な連結可解部分群であるが、それらはすべて G-共役である。また、B の正規化群 $N_G(B)$ は B 自身に一致するので、これは等質空間 G/B が G の Borel 部分群全体と同一視できることを意味する[1]。ある Borel 部分群 B を含むような G の部分群 P を放物型部分群と呼ぶ。

定義 1.1. B を G の Borel 部分群として、$\mathfrak{X}_B = G/B$ を旗多様体と呼ぶ。放物型部分群 P に対しても、$\mathfrak{X}_P = G/P$ と書き、これを部分旗多様体と呼ぶ。部分旗多様体は滑らか

第 56 回代数学シンポジウム報告集原稿 (2011/08/08 – 08/11; 岡山大学環境理工学部棟 104 教室) .

∗) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (B) #21340006.

[1] B は連結なので、そのリー環を考えることにより G/B を Borel 部分環の全体とみなすこともできる。

な射影多様体であるが、逆に、G-等質多様体であってかつ射影多様体であるようなものは部分旗多様体に同型である。

例 1.2. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を考えよう。B を G に属する上半三角行列の全体とすると、これは G の Borel 部分群となる。このとき、旗多様体 G/B は旗と呼ばれる $\mathbb{C}^n$ の部分空間の増大列

$$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = \mathbb{C}^n \qquad (\dim F_k = k) \tag{1.1}$$

の全体 $\mathscr{F}_n$ と同型である。具体的には、旗 $F = (F_k)_{k=0}^n$ に対して、 Borel 部分群 B^F を

$$B^F = \{g \in G \mid gF_k \subset F_k \ \ (0 \leq k \leq n)\}$$

と定義すれば、これが全単射 $\mathscr{F}_n \xrightarrow{\sim} G/B$ を与える。

次に部分群

$$P = P_{r,s} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_r & * \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_s \end{array}\right) \qquad (r + s = n)$$

を考えよう。この部分群は上半三角行列からなる Borel 部分群 B を含むから放物型部分群であるが、これより大きな部分群は G しかないので、極大放物型部分群である。

このとき $P_{r,s}$ は $\mathbb{C}^n$ の最初の r 成分だけがゼロでないような、標準的な r 次元部分空間を安定にする。したがって $G/P_{r,s}$ は $\mathbb{C}^n$ の r 次元部分空間全体からなる Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}_r(\mathbb{C}^n)$ と同型である。これは、ちょうど完全旗 (1.1) のうち次元が r の部分 F_r だけを取り出すことにあたるから、$G/P_{r,s}$ は部分旗多様体と呼ばれるのである。

例 1.3. C_n 型の単純リー群 $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ を考えよう。一般に、G の放物型部分群は、シンプレクティック空間 $\mathbb{C}^{2n}$ の等方的部分空間の旗の安定化部分群として得られる。特に完全旗を考えればそれが Borel 部分群になる。また、次元が r の等法的部分空間を安定にする部分群は極大放物型部分群になる。そこで、

$$P = P_r = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{GL}_r & * & * \\ \hline 0 & \mathrm{Sp}_{2(n-r)} & * \\ \hline 0 & 0 & {}^t\mathrm{GL}_r{}^{-1} \end{array}\right) \qquad (r \leq n)$$

とおくと、これは極大放物型部分群になり、$G/P_r = \mathrm{IGrass}_r(\mathbb{C}^{2n})$ は r 次元の等方的部分空間全体からなる isotropic Grassmann 多様体である。

等方的部分空間が最大次元になるのは $r = n$ の時であり、このような等方的部分空間を Lagrange 部分空間と呼ぶ。標準的な Larange 部分空間を安定にする部分群は

$$P_n = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_n & * \\ \hline 0 & {}^t\mathrm{GL}_n{}^{-1} \end{array}\right)$$

であり、Siegel 放物型部分群と呼ばれる。この場合、$G/P_n = \mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$ は Lagrangian Grassmann 多様体である。

Lagrangian Grassmann 多様体 $\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$ 上の Schubert 解析は、古くは Pragacz-Ratajski [PR93], [PR97] に始まり、最近 池田岳, Mihalcea, 成瀬弘 [Ike07], [IN09], [IMN11] 等による研究によって脚光を浴びつつある。ここで Schubert 解析とは Schubert 多様体

の交点理論を主な研究対象とする、代数幾何・トポロジー・組合せ論などが入り交じった渾然一体とした理論をさす。Schubert 多様体は実は旗多様体上の B-軌道の閉包として定義される多様体であり、以下の話と密接な関係を持っている。

1.2. **多重旗多様体.** 旗多様体のいくつかの直積を多重旗多様体と呼ぶ。k 個の放物型部分群 $P_1, \dots, P_k$ に対して多重旗多様体 $X = \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \cdots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ を考えると、X には G が対角的に働いているが、その軌道が有限個のときに有限型という。

有限型の例をいくつか挙げよう。

1.2.1. *Bruhat 分解.* B を Borel 部分群として、$X = G/B \times G/B = \mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_B$ を考えよう。このとき

$$G\backslash X = G\backslash(G/B \times G/B) \simeq B\backslash G/B = \coprod_{w\in W} BwB \tag{1.2}$$

は Bruhat 分解に他ならない。ここで W は B の極大トーラス T から定まる Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ である。以下我々はしばしば Weyl 群の元と $N_G(T)$ に属する代表元とを同一視する。

Bruhat 分解 $B\backslash G/B$ を $G\backslash\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_B$ と解釈することで Steinberg は Steinberg 多様体を定義し、その既約成分から冪零軌道への自然な射影を与えた。さらに、この枠組みを用いて Robinson-Schensted 対応の幾何学的な解釈など豊かな理論が展開できることを示している ([Ste76], [Ste88]; [DR09])。我々の研究の原型もここにある。

1.2.2. *球作用を持つ二重旗多様体.* 三重旗多様体 $X = G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$ を考える。ここで P_1, P_2 は極大放物型部分群、B は Borel 部分群である。

このとき Bruhat 分解のときと同様にして

$$G\backslash X \simeq B\backslash(G/P_1 \times G/P_2) \tag{1.3}$$

だから、X が有限型であることと、$\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ が有限個の B 軌道を持つことは同値である。X は既約であるから、特に B は開軌道を持つ。

一般に、稠密な開 B 軌道を持つ G 多様体を球多様体 (spherical variety) と呼ぶが、このような多様体は表現論的に著しい性質を持つ。例えば Y がアフィン G 多様体なら、Y が球多様体であることと、正則関数環 $\mathbb{C}[Y]$ が G 加群として重複度自由に分解することは同値である。もちろん、$\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ は射影多様体であるから、ことはそれほど単純ではないが、線束とその切断の空間を考えることにより、

$$\Gamma(\mathfrak{X}_{P_1}, \mathscr{L}_{k\varpi_1}) \otimes \Gamma(\mathfrak{X}_{P_2}, \mathscr{L}_{\ell\varpi_2})$$

が G の表現として重複度 1 で分解することがわかる。

このような有限型の三重旗多様体 $X = G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$ は Littelmann により分類されている ([Lit94])。

1.2.3. 有限型三重旗多様体の分類. 一般の放物型部分群 P_1, P_2, P_3 に対して三重旗多様体 $X = G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$ を考える。

$G = \mathrm{GL}_n$ または Sp_{2n} の時には Magyar-Weymann-Zelevinsky による有限型の三重旗多様体の分類がある ([MWZ99], [MWZ00])。また G が直交群の場合には、三重旗多様体上の軌道は松木によって詳しく調べられている ([Mat10])。

ここでは $G = \mathrm{GL}_n$ の場合にその分類を紹介しておく。

記号: GL_n の放物型部分群は、ブロック上半三角行列のものを、対角ブロックのサイズで指定して表す。例えば $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ が n の分割であるとき、対角ブロックのサイズがそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ のブロック上半三角行列全体のなす放物型部分群が P_λ である。また、ブロックの数を $\ell(\lambda)$ で表す。ブロックが 2 つ、つまり $\ell(\lambda) = 2$ のとき極大放物型部分群であり、また分割 $(n-1, 1)$ または $(1, n-1)$ に対応するとき、*mirabolic* と呼ばれる。

分割 λ, μ, ν に対応する放物型部分群を P_λ, P_μ, P_ν と書くと、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_\lambda} \times \mathfrak{X}_{P_\mu} \times \mathfrak{X}_{P_\nu}$ が有限型であるのは次の場合である。ただし、放物型部分群の順序や、あるいは分割の並び $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ などは並べ替えても良いとする。

type	$(\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\nu))$	extra condition(s)
$S_{q,r}$	$(2, q, r)$	$\lambda = (n-1, 1)$
D_{r+2}	$(2, 2, r)$	
E_6	$(2, 3, 3)$	
E_7	$(2, 3, 4)$	
E_8	$(2, 3, 5)$	
$E_{r+3}^{(a)}$	$(2, 3, r)$	$\lambda = (n-2, 2)$ $(n \geq 4)$
$E_{r+3}^{(b)}$	$(2, 3, r)$	$\mu = (\mu_1, \mu_2, 1)$

1.3. **Mirabolic** な三重旗多様体. 上の分類表 ($S_{q,r}$ 型) にもあるように、$G = \mathrm{GL}_n \supset B$ が Borel 部分群で $P = P_{(n-1,1)}$ が対角ブロックサイズ $(n-1, 1)$ の極大放物型部分群のときには三重旗多様体 $X = \mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_P$ は有限型である。$\mathfrak{X}_B \simeq \mathscr{F}\!\ell_n$ は旗の全体からなる (文字通りの意味の) 旗多様体であり、$\mathfrak{X}_{P_{(n-1,1)}} \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ は $(n-1)$ 次元の射影空間であるから、

$$X = G/B \times G/B \times G/P \simeq \mathscr{F}\!\ell_n \times \mathscr{F}\!\ell_n \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \tag{1.4}$$

である。もちろん完全旗多様体 $\mathscr{F}\!\ell_n$ を任意の部分旗多様体に置き換えてもやはり有限型の三重旗多様体である。X は mirabolic な三重旗多様体と呼ばれ、Finkelberg-Ginzburg-Travkin [FGT09] や Travkin [Tra09] によって幾何学的セルや Robinson-Schensted 対応の一般化などが詳細に研究されている。

2. 対称対の二重旗多様体

2.1. 対称対. G を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群、$\theta \in \mathrm{Aut}\, G$ を G の自己同型で $\theta^2 = \mathrm{id}$ を満たすとする。このとき、θ は包含的自己同型と呼ばれる。θ の固定点のなす部分群

$$K = G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\} \tag{2.1}$$

を G の対称部分群、(G,K) を対称対と呼ぶ。K は簡約代数群であるが、一般に連結とは限らない。しばしば K の代わりにその連結成分を考える。この報告では以下、K を連結と仮定する。K は簡約なので G/K はアフィン多様体である。そこで G/K をアフィン対称空間と呼ぶ。

対称対の例をいくつか挙げておこう。

例 2.1. type A : $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合
(1) 包含的自己同型を $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ と決めると、$K = \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ は直交群である。また $G/K \simeq \mathrm{Sym}_n^\circ(\mathbb{C})$ は非退化対称行列の全体である。
(2) 包含的自己同型を $\theta(g) = I_{p,q}\, g\, I_{p,q}\quad (I_{p,q} = \mathrm{diag}(1_p, -1_q))$ とすると $K = \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$ である。このとき G/K は $I_{p,q}$ の共役類全体のなすアフィン多様体と同型である。

例 2.2. 包含的自己同型を具体的に記述はしないが、G が単純の場合に、対称対を (局所同型を除いてほとんどすべて) あげておこう。
(1) type A : $(G,K) = (\mathrm{SL}_{2n}, \mathrm{Sp}_{2n})$
(2) type C : $(G,K) = (\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{GL}_n), (\mathrm{Sp}_{2p+2q}, \mathrm{Sp}_{2p} \times \mathrm{Sp}_{2q})$
(3) type BD : $(G,K) = (\mathrm{SO}_{2n}, \mathrm{GL}_n), (\mathrm{SO}_{p+q}, \mathrm{SO}_p \times \mathrm{SO}_q)$
(4) 例外型: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (E_6, \mathfrak{sp}_8), (E_6, F_4), (E_7, \mathfrak{sl}_8), (E_8, \mathfrak{o}_{16}), (F_4, \mathfrak{o}_9), (G_2, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2), \ldots$

最後に、以下の議論で重要な役割を果たすことになる、群多様体の場合を紹介しておこう。G を今まで通り簡約代数群とし、その直積 $\mathbb{G} = G \times G$ を考える。包含的自己同型を $\theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ で定めよう。すると、対称部分群は G を対角的に埋め込んだ

$$\mathbb{K} = \mathrm{diag}\, G = \{(g,g) \mid g \in G\} \tag{2.2}$$

になり、これは G と同型である。対称空間は

$$\mathbb{G}/\mathbb{K} = G \times G/\mathrm{diag}\, G \simeq G \qquad (\text{多様体としての同型}) \tag{2.3}$$

となるので、これを群多様体の場合と称する。

2.2. **KGB 理論.** 対称対 (G,K) を考えることは複素リー群 G の実形である非コンパクトリー群 $G_{\mathbb{R}}$ を考えることに相当している。ここで $G_{\mathbb{R}}$ は K のコンパクト実形 $K_{\mathbb{R}}$ を極大コンパクト部分群に持つような非コンパクトリー群として定まる。例えば対称対 $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{O}_n)$ は実リー群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対応するし、群多様体 $(G \times G, \mathrm{diag}\, G)$ は複素リー群 G を実リー群と考えたものに対応している。前者では $K_{\mathbb{R}}$ は実直交群 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$、後者では G のコンパクト実形が $K_{\mathbb{R}}$ となっている。

このとき、$G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ は非コンパクトリーマン対称空間である。G/K はいわばこのリーマン対称空間の複素化ということができ、実際、G/K の中に $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ を全実部分多様体 (totally real submanifold) として含む $G_{\mathbb{R}}$ 安定な複素領域が Akhiezer-Gindikin [AG90] によって構成され、王冠領域 (crown domain) と呼ばれている。このような意味で、複素対称対 (G,K) を考えることは、実リー群上の調和解析・表現論にとっても重要である ([Krö07], [KO08])。

定理 2.3. (G,K) を対称対とすると次が成り立つ。

(1) Borel 部分群 B に対して $\#K\backslash G/B < \infty$.
(2) アフィン対称空間 G/K は G の作用に関して球等質空間である。
(3) 関数環 $\mathbb{C}[G/K]$ は G 加群として重複度自由に分解する。

両側剰余類 $K\backslash G/B$ は G/K 上の B 軌道の全体と思うこともできるし、旗多様体 $\mathfrak{X}_B = G/B$ 上の K 軌道と思うこともできる。

旗多様体 $\mathfrak{X}_B$ 上の K 同変な $\mathscr{D}$ 加群の圏と、無限小指標が自明な Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏が圏同値になっていることが知られている (Beilinson Bernstein 対応) が、単純 $\mathscr{D}$ 加群は $\mathfrak{X}_B$ 上の K 軌道とその局所系で分類できるので、既約な Harish-Chandra 加群も同じように K 軌道と局所系によって分類できる。このような、幾何と $\mathscr{D}$ 加群、そして Harish-Chandra 加群の間の対応を含む理論を俗に KGB 理論と呼ぶが、その出発点は $\mathfrak{X}_B$ 上の K 軌道の有限性にある。

このようにして、対称対、そして旗多様体上の対称部分群 K の軌道分解は実リー群の表現論にとって重要であることがわかる。

2.3. 二重旗多様体. この報告の主題である、対称対に付随した二重旗多様体を定義しよう。

上のように (G, K) を対称対と仮定し、P を G の放物型部分群、Q を K の放物型部分群とする。

$\mathfrak{X}_P = G/P$ は G の部分旗多様体であったが、K の部分旗多様体を $\mathcal{Z}_Q = K/Q$ で表すことにしよう。

定義 2.4 (二重旗多様体 [NO11]). 部分旗多様体の直積 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ を対称対に付随した二重旗多様体と呼ぶ。二重旗多様体には K が対角的に作用しているが、その軌道が有限個のとき、$\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ を有限型と呼ぶ。

K の放物型部分群 Q に対して、G の θ 安定な放物型部分群 P' であって、$Q = P' \cap K$ となるものが存在する。このような P' は一意的ではないが、以下重要な役割を果たすので、P' を一つ固定して考えることにしよう。

例 2.5. $G = \mathrm{GL}_n$ の場合 (つまり A 型の対称対) に、有限型二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ の例を挙げておく。今のところ我々の把握している有限型の二重旗多様体はこれで（ほとんど）すべてである。

放物型部分群の分割を用いた表記 P_λ や極大放物型部分群・mirabolic などの用語は § 1.2.3 に準ずる。また、SO_{2n} または Sp_{2n} の放物型部分群で、極大等方的部分空間を安定にする放物型部分群を Siegel 型と呼ぶ。

Type AI : $G/K = \mathrm{SL}_n/\mathrm{SO}_n$ $(n \geq 3)$

P	Q	$\mathfrak{X}_P$	$\mathcal{Z}_Q$	extra condition
maximal	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{Z}_Q$	
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Siegel	$\mathfrak{X}_P$	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^n)$	n is even

Type AII : $G/K = \mathrm{SL}_{2n}/\mathrm{Sp}_{2n}$ $(n \geq 2)$

P	Q	$\mathfrak{X}_P$	$\mathcal{Z}_Q$
maximal	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{Z}_Q$
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Siegel	$\mathfrak{X}_P$	$\mathrm{LGrass}_m(\mathbb{C}^{2n})$

Type AIII : $G/K = \mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_p{\times}\mathrm{GL}_q$ $(n = p + q)$

P	Q_1	Q_2	$\mathfrak{X}_P$	$\mathcal{Z}_Q$
any	mirabolic	GL_q	$\mathfrak{X}_P$	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^p)$
any	GL_p	mirabolic	$\mathfrak{X}_P$	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$
maximal	any	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^n)$	$\mathcal{Z}_Q$
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	maximal	maximal	$\mathfrak{X}_P$	$\mathrm{Grass}_k(\mathbb{C}^p){\times}\,\mathrm{Grass}_\ell(\mathbb{C}^q)$

2.4. 多重旗多様体との関係.

2.4.1. 三重旗多様体. 三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1}{\times}\mathfrak{X}_{P_2}{\times}\mathfrak{X}_{P_3}$ は G 多様体として対称対の二重旗多様体の特別なものと思うことができる。実際、群多様体 $\mathbb{G} = G{\times}G$ および $\mathbb{K} = \mathrm{diag}\, G$ を考え、

$$\mathbb{P} = P_1 \times P_2, \qquad \mathbb{Q} = \mathrm{diag}\, P_3$$

とおくと、これらはそれぞれ $\mathbb{G}$ と $\mathbb{K}$ の放物型部分群であり、

$$\mathbb{G}/\mathbb{P} \times \mathbb{K}/\mathbb{Q} = G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3 = \mathfrak{X}_{P_1}{\times}\mathfrak{X}_{P_2}{\times}\mathfrak{X}_{P_3} \tag{2.4}$$

となることがわかる。このとき $\mathbb{K} = \mathrm{diag}\, G \simeq G$ だから、$\mathbb{K}$ の作用は対角的な G の作用に他ならない。

2.4.2. 二重旗多様体. K の放物型部分群 Q に対して、G の θ 安定な放物型部分群 P' であって、$Q = P' \cap K$ となるものをとる。このとき、G の旗多様体 $\mathfrak{X}_{P'} = G/P'$ を考えると、自然な埋め込み

$$\mathcal{Z}_Q \simeq K{\cdot}P'/P' \xhookrightarrow{\text{closed}} \mathfrak{X}_{P'}$$

がある。つまり $\mathcal{Z}_Q$ は $\mathfrak{X}_{P'}$ における閉 K 軌道とみなすことができる。したがって、二重旗多様体の閉埋め込み

$$\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q \xhookrightarrow{\quad\text{closed}\quad} \mathfrak{X}_P{\times}\mathfrak{X}_{P'}$$

を得る。このようにして、対称対の二重旗多様体は G の二重旗多様体の滑らかな閉部分多様体である。しかし残念ながら $\#K\backslash(\mathfrak{X}_P{\times}\mathfrak{X}_{P'}) = \infty$ であって、$\mathfrak{X}_P{\times}\mathfrak{X}_{P'}$ 上の K 軌道は一般に無限にある。

3. 有限性の判定

二重旗多様体が有限型かどうかを判定する簡単な方法は、すでに分類が完成している三重旗多様体の有限性に帰着することである。その帰着の方法は二通りあり、重複する場合も多いが、それぞれ補完的な役割を果たしている。

3.1. **三重旗多様体への θ-twisted な埋め込み.** 二重旗多様体上の軌道の有限性を三重旗多様体の場合に帰着することができる。

定理 3.1 (N-Ochiai [NO11])**.** 上のように G の θ 安定な放物型部分群 P' をとり、$P' \cap K = Q$ であるとする。このとき、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} \times \mathfrak{X}_{P'}$ が G の作用に関して有限型ならば、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ は K の作用に関して有限型である。

系 3.2. G の放物型部分群 P に対して、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)}$ が G の作用に関して球多様体であれば、旗多様体 $\mathfrak{X}_P$ は K の作用に関して球多様体である。

定理の証明は旗多様体の θ-twisted embedding と Bruhat 分解を用い、K 軌道を多様体の交叉の連結成分として書き表すという、なかなか面白いものなのだが、ここでは残念ながら割愛する。[NO11] を参照してほしい。

系の証明は簡単なので紹介しておこう。

[系の証明]. まず G の θ 安定な Borel 部分群 B をとると、$S := K \cap B$ は K の Borel 部分群である。一方

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} : G\text{-spherical} &\iff \# B \backslash (\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)}) < \infty \\ &\iff \# G \backslash (\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} \times \mathfrak{X}_B) < \infty \end{aligned}$$

であるが、定理より、これは $\# K \backslash (G/P \times K/S) < \infty$ を意味する。

$$\begin{aligned} \# K \backslash (G/P \times K/S) < \infty &\iff \# S \backslash G/P < \infty \\ &\iff \mathfrak{X}_P = G/P : K\text{-spherical} \end{aligned}$$

だから、系が証明された。 □

3.2. **旗多様体への埋め込み.** 定理 3.1 は有限型の二重旗多様体を構成する手法としてはかなり強力であるが、すべての二重旗多様体を網羅する訳ではない。ここではもう一つの (捻らない) 旗多様体の埋め込みを用いる方法を紹介しよう。こちらの手法の方がより直接的で単純である。

ポイントは G/Q を $G/P_2 \times G/P_3$ に埋め込んで考えることである。

命題 3.3. G の放物型部分群 P_i $(i = 1, 2, 3)$ が次の条件 (1), (2) を満たすと仮定する。

(1) $Q := P_2 \cap P_3$ は K の放物型部分群である。

(2) 三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ は G の対角的作用に関して有限型である。

このとき、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathcal{Z}_Q$ は K の作用に関して有限型である。

命題の条件 (1) に加えて、さらに $P_2 \cdot P_3 \subset G$ が開かつ稠密、$P_1 = B$ が Borel 部分群であると仮定する。このとき、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ が有限型であることと、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型であることは同値になる。

このような放物型部分群 P_2, P_3 の組については Kondo-N-Ochiai-Taniguchi による研究がある ([KNOT11], [Kon11])。

4. 二重旗多様体上の軌道の分類

二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ 上の K 軌道を "分類" することができる。ここで引用符付きで分類と書いたのは、かならずしもこの分類に現れるパラメータが計算可能なものであるとは限らないからである。しかし、我々の分類の利点は、次のような点にある。

- 分類は有限型か否かに関係しない。したがって、分類定理によって逆に有限型であるための判定条件を得ることができる。
- 分類理論は三重旗多様体に依存しないので、軌道の有限性の判定条件は三重旗多様体にも使うことができる。
- 分類のパラメータはルート系と Weyl 群の言葉でほぼ書き表すことができ、組合せ論との親和性が高い。また例外型群でも計算が実行可能である。(例外型群については有限型の三重旗多様体の分類もまだ存在していないことに注意する。)
- パラメータ空間は冪単群の両側剰余類とその上の共役作用に落ちる。冪単群の構造は比較的単純であり、多くの場合にパラメータ空間の具体的な計算が実行できると期待できる。

分類は、二重旗多様体上の軌道を Bruhat 分解とより小さな対称空間に対する KGB 理論に帰着することによって行われる。まず Bruhat 分解への帰着から話を始めよう。

4.1. Bruhat 分解への還元. すでに論じてきたように P を G の放物型部分群、Q を K の放物型部分群とし、P' を G の θ 安定な放物型部分群で $Q = P' \cap K$ となるようなものとする。このとき

$$K\backslash\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q = K\backslash(G/P \times K/Q) \simeq P\backslash G/Q \tag{4.1}$$

だから次のような自然な射影がある。

$$\begin{tikzcd}
K\backslash\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q \arrow[r, "\sim"] \arrow[ddr, "\Phi"'] & P\backslash G/Q \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & \\
& P\backslash G/P' \arrow[d, "\simeq"] & = \coprod_{w \in {}^JW^{J'}} PwP' : \text{Bruhat 分解} \\
& {}^JW^{J'} & = W_P\backslash W/W_{P'}
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

射影 $K\backslash\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q \to {}^JW^{J'}$ は全射であり、そのファイバー $P\backslash PwP'/Q$ $(w \in {}^JW^{J'})$ を理解すれば軌道の分類ができる。ただし ${}^JW^{J'}$ は両側剰余類 $W_P\backslash W/W_{P'}$ の代表元系であるが、次の節の記号を先取りした。

4.2. KGB への還元. より小さな対称空間の KGB 理論を利用する。そこで、$B \supset T$ を θ 安定な Borel 部分群と極大トーラスの組とする。ルート系はこの T に関して考えることにし、B に対応する正ルート系と単純ルートを $\Delta^+ \supset \Pi$ のように取る。

放物型部分群の G 共役類は Π の部分集合と一対一に対応しているが、P に対応する部分集合を $J \subset \Pi$ とし、P' に対応するものを $J' \subset \Pi$ とする。また

$$P = LU, \qquad P' = L'U'$$

を Levi 分解としよう。このとき、例えば Levi 部分群 L のルート系は J によって生成される。また U は P の冪単根基である。

J の各単純ルートに関する鏡映から生成された Weyl 群を W_J と書き、同様に $W_{J'}$ も定義する。このとき $W_J \backslash W / W_{J'}$ の代表元を各両側剰余類において長さが最小のものにとっておき、それを ${}^J W^{J'}$ で表す。代表元 $w \in {}^J W^{J'} \simeq W_J \backslash W / W_{J'}$ に対して、我々は $P \backslash PwP'/Q$ を調べたいのであった。

$P_{L'}(w) := w^{-1}Pw \cap L'$ と定義すると、これは L' の放物型部分群になる。また $L'_K := L' \cap K = (L')^\theta$ とおけば、L' が θ 安定なので、L'_K は L' の対称部分群である。

このことから、両側剰余類 $\mathscr{V}(w) := P_{L'}(w) \backslash L' / L'_K$ は L' の旗多様体上の対称部分群による軌道とみなすことができ、これは有限個しかない。つまり "小さな" $P \backslash G / K$ である。

次の射影を考えよう。

$$\begin{array}{ccc} P \backslash PwP'/Q & \xrightarrow{\text{surj}} & P_{L'}(w) \backslash L' / L'_K = \mathscr{V}(w) \\ \cup & & \cup \\ PwaQ & \longmapsto & P_{L'}(w) \ell_a L'_K \end{array} \tag{4.3}$$

ただし $a = \ell_a u_a$ は、Levi 分解 $P' = L'U'$ に沿った $a \in P'$ の分解を表す。この写像は全射であるが、残念ながら全単射ではない。しかし、これで KGB 理論への還元ができたので、あとはこの写像のファイバーをさらに解析すればよい。

4.3. 軌道の分類. 前節までの記号を引き継ぐ。Bruhat 分解 $P \backslash G / P'$ のパラメータ $w \in {}^J W^{J'}$ と KGB 分解のパラメータ $v \in \mathscr{V}(w)$ に対して、

$$\begin{cases} \mathscr{U}(w, v) := (U' \cap P(wv)) \backslash U' / (U' \cap K) & : \text{冪単多様体の商} \\ L'_K(w, v) := L' \cap K \cap P(wv) \ \subset L'_K \end{cases} \tag{4.4}$$

とおく。ただし $P(g) = g^{-1}Pg \in \mathfrak{X}_P$ と書いた。

群 $L'_K(w, v)$ は冪単でも簡約でもないが、随伴作用によって $\mathscr{U}(w, v)$ に作用する。この商軌道空間を $\mathscr{U}(w, v) / \operatorname{Ad}(L'_K(w, v))$ と書く。

定理 4.1 (He-N-Ochiai [HNO11])**.** ${}^J W^{J'} = W_J \backslash W / W_{J'}$ に対して $\mathscr{V}(w) = P_{L'}(w) \backslash L' / L'_K$ とおく。この記号の下に、次の軌道空間の間の全単射が成り立つ。

$$K \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathscr{Z}_Q \simeq \coprod_{w \in {}^J W^{J'}} \coprod_{v \in \mathscr{V}(w)} \mathscr{U}(w, v) / \operatorname{Ad}(L'_K(w, v)) \tag{4.5}$$

この定理より、二重旗多様体の有限性の必要十分条件が得られる。

系 4.2. 二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathscr{Z}_Q$ が有限型であるための必要十分条件は

$$\#\Big((U' \cap P(g)) \backslash U' / U'_K \Big) \Big/ \operatorname{Ad}(L'_K \cap P(g)) < \infty \qquad ({}^\forall g \in PWL') \tag{4.6}$$

が成り立つことである。

Q が K の Borel 部分群のときには、判定条件はもっと簡単である。

系 4.3. $Q = B_K \subset K$ を K の Borel 部分群とし、さらに $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$ を仮定する。$B = TU_0 \subset G \quad (T:$ 極大トーラス, U_0 極大冪単部分群) を B の Levi 分解とする。このとき、次の全単射が成り立つ。

$$K\backslash\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q \simeq \coprod_{w \in {}^JW} \Big((U_0 \cap P(w))\backslash U_0/(U_0 \cap K) \Big) \Big/ \operatorname{Ad} T \tag{4.7}$$

特に、$\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型であるための必要十分条件は

$$\#\Big((U_0 \cap P(w))\backslash U_0/(U_0 \cap K) \Big) \Big/ \operatorname{Ad} T < \infty \qquad (\forall w \in {}^JW) \tag{4.8}$$

が成り立つことである。

5. 二重旗多様体と Steinberg 多様体

5.1. モーメント写像. 対称対の二重旗多様体を簡単のため $X := \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ で表そう。K は X に対角的に働いているので、この作用に関するモーメント写像

$$\mu_X : T^*X \longrightarrow \mathfrak{k}^* \tag{5.1}$$

が考えられる。ここで T^*X は X の余接束を表し、$\mathfrak{k}^*$ は K のリー環 $\mathfrak{k}$ の双対空間である。このモーメント写像に関する Steinberg 多様体をまず定義しよう。そして、研究はまだまだ進んでいないのであるが、Steinberg 理論への入り口を確認しておきたい。

旗多様体 $\mathfrak{X}_P$ を P と共役な放物型部分群の全体と同一視すると、余接束 $T^*\mathfrak{X}_P$ は $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{g}^*$ の中に実現できる。ここで $\mathfrak{g}^*$ は G のリー環 $\mathfrak{g}$ の双対空間を表す。

$$T^*\mathfrak{X}_P = \{(P_1, \xi) \mid P_1 \in \mathfrak{X}_P, \xi \in \mathfrak{p}_1^\perp\} \subset \mathfrak{X}_P \times \mathfrak{g}^*$$

同様にして

$$T^*\mathcal{Z}_Q = \{(Q_1, \eta) \mid Q_1 \in \mathcal{Z}_Q, \eta \in \mathfrak{q}_1^\perp\} \subset \mathcal{Z}_Q \times \mathfrak{k}^*$$

である。このとき $T^*\mathfrak{X}_P$ 上のモーメント写像 $\mu_{\mathfrak{X}_P}$ は第 2 成分への射影で与えられ、X の余接束は $T^*X = T^*\mathfrak{X}_P \times T^*\mathcal{Z}_Q$ と分解するから、モーメント写像 μ_X は次のように計算できる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
T^*X \arrow[ddrr, "\mu_X"'] & = & T^*\mathfrak{X}_P \times T^*\mathcal{Z}_Q \arrow[d, "\mu_{\mathfrak{X}_P} \times \mu_{\mathcal{Z}_Q}"] & \ni & \big((P_1, \xi), (Q_1, \eta)\big) \arrow[d, mapsto] \\
 & & \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^* \arrow[d, "\alpha"] & \ni & (\xi, \eta) \arrow[d, mapsto] \\
 & & \mathfrak{k}^* & \ni & \xi\big|_{\mathfrak{k}} + \eta
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

旗多様体のモーメント写像は別の表示で表すこともできる。まず放物型部分群 P に対して、$\mathfrak{p}^\perp \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \simeq \mathfrak{u}_P$ であることに注意しよう。ここで、$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上の $\operatorname{Ad} G$ 不変な双線型

形式を一つとって、それによって同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ を行った。この同一視を用いて余接束を書き直すと

$$T^*\mathfrak{X}_P = \{(gPg^{-1}, \mathrm{Ad}(g)x) \mid g \in G, x \in \mathfrak{u}_P\} \subset \mathfrak{X}_P \times \mathfrak{g}$$

となる。さらにこれは同型

$$G \times_P \mathfrak{u}_P \ni (g, x) \mapsto (gPg^{-1}, \mathrm{Ad}(g)x) \in T^*\mathfrak{X}_P$$

により主ファイバー束 $G \times_P \mathfrak{u}_P$ と同一視できる。このときモーメント写像は $\mu_{\mathfrak{X}_P}(g, x) = \mathrm{Ad}(g)x$ と表されている。同様にして $\mathfrak{u}_Q$ で Q のリー環 $\mathfrak{q}$ の冪零根基を表すと、

$$T^*\mathcal{Z}_Q = K \times_Q \mathfrak{u}_Q \qquad (\mathfrak{u}_Q = \mathfrak{u}_{P'} \cap \mathfrak{k})$$

である。またこれらのモーメント写像の像は

$$\mu_{\mathfrak{X}_P}(T^*\mathfrak{X}_P) = G \cdot \mathfrak{u}_P = \overline{\mathscr{O}_P^G} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}) : P \text{ の Richardson 軌道 の閉包}$$

$$\mu_{\mathcal{Z}_Q}(T^*\mathcal{Z}_Q) = K \cdot \mathfrak{u}_Q = \overline{\mathscr{O}_Q^K} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{k}) : Q \text{ の Richardson 軌道 の閉包}$$

で与えられる。ここで $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に含まれる冪零元たちからなる冪零多様体である。

5.2. **Steinberg 多様体と冪零多様体.** 対称対の二重旗多様体 $X = \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ に対する Steinberg 多様体は

$$S_X := \mu_X^{-1}(0) = \bigcup_{\mathbb{O} \in K \backslash X} \overline{T^*_{\mathbb{O}} X} \tag{5.3}$$

で定義される[2] 。ここで $T^*_{\mathbb{O}}X$ は K 軌道 $\mathbb{O} \in K\backslash X$ 上の余法束を表す。この分解 (5.3) は、等次元多様体 S_X の既約分解を与えていることに注意しよう。さて、

$$x^\theta := \frac{1}{2}(x + \theta(x)) \in \mathfrak{k} \qquad \text{とおくと} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \ni x & \longleftrightarrow & \xi \in \mathfrak{g}^* \\ x^\theta & \longleftrightarrow & \xi\big|_{\mathfrak{k}} \end{array}$$

であるから、Steinberg 多様体 S_X のモーメント写像 $\mu_{\mathfrak{X}_P} \times \mu_{\mathcal{Z}_Q}$ による像は

$$\begin{aligned} (\mu_{\mathfrak{X}_P} \times \mu_{\mathcal{Z}_Q})(S_X) &= \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{k} \mid x \in \overline{\mathscr{O}_P^G},\ y \in \overline{\mathscr{O}_Q^K},\ \tfrac{1}{2}(x + \theta(x)) + y = 0\} \\ &= \{(x, -x^\theta) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{k} \mid x \in \overline{\mathscr{O}_P^G},\ x^\theta \in \overline{\mathscr{O}_Q^K}\} \\ &\simeq \{x \in \mathfrak{g} \mid x \in \overline{\mathscr{O}_P^G},\ x^\theta \in \overline{\mathscr{O}_Q^K}\} \end{aligned}$$

である。

定義 5.1. 対称対の二重旗多様体 $X = \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ に対して

$$\mathcal{N}_X := \{x \in \mathfrak{g} \mid x \in \overline{\mathscr{O}_P^G}, x^\theta \in \overline{\mathscr{O}_Q^K}\} \tag{5.4}$$

とおき、これを二重旗多様体に付随した冪零多様体と呼ぶ。また、K 軌道 $\mathbb{O}$ 上の余法束 $T^*_{\mathbb{O}}X$ に対して、

$$\mathcal{N}_X(\mathbb{O}) := (\mu_{\mathfrak{X}_P} \times \mu_{\mathcal{Z}_Q})(\overline{T^*_{\mathbb{O}}X}) \tag{5.5}$$

とおいて、軌道 $\mathbb{O}$ に付随した冪零多様体と呼ぶ。

[2] Steinberg 多様体は余法束多様体 (conormal variety) とも呼ばれる。

対称対の冪零多様体はまだよく理解されていない。例えば、次のような基本的な未解決問題を挙げることができる。

問題 5.2.
(1) 冪零多様体 $\mathcal{N}_X$ 上の K 軌道は有限であるか？ (一般的には答は否定的である。)
(2) $\mathcal{N}_X(\mathbb{O})$ による $\mathcal{N}_X$ の stratification の構造を明らかにせよ。
(3) 既約な閉 K 多様体 $\mathcal{N}_X(\mathbb{O})$ の特異点の構造を明らかにせよ。
(4) X 上の軌道と冪零多様体の間の組合せ論的構造 (Robinson-Schensted-Knuth 対応の一般化) を論じよ。

分かっていることはそう多くないが、現在の研究成果を述べる。
簡単のため $Q = B_K \subset K$ が K の Borel 部分群の場合を考えよう。

$$\begin{array}{ccc} X = \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q & \supset & \mathbb{O} \\ {\scriptstyle \pi_1} \big\downarrow {\scriptstyle 1^{\text{st}}\ \text{proj}} & & \big\downarrow \\ \mathfrak{X}_P & \supset & \mathcal{O} \end{array}$$

を X 上の K 軌道空間から、$\mathfrak{X}_P$ 上の K 軌道空間への射影とする。$\mathcal{O} \subset \mathfrak{X}_P$ を閉 K 軌道として、その軌道が P_1 を通るとしよう。つまり $\mathcal{O} = K \cdot P_1$ である。このとき

$$K \cdot \mathfrak{u}_{P_1} = \coprod_{\mathbb{O} \in \pi_1^{-1}(\mathcal{O})} \mathcal{N}_X(\mathbb{O}) = \mathcal{N}_X(^{\exists}\mathbb{O}_1)$$

が成り立っている。

定理 5.3 (Fresse-N-Ochiai [FNO11]). (1) $\mathfrak{u}_{P_1}$ をリー環 $\mathfrak{p}_1$ の冪零根基とする。このとき自然な写像

$$K \times_{K \cap P_1} \mathfrak{u}_{P_1} \to K \cdot \mathfrak{u}_{P_1} = \mathcal{N}_X(\mathbb{O}_1) \tag{5.6}$$

は特異点解消である。
(2) 冪零根基上の随伴軌道が有限個であったとする。つまり $\#\mathfrak{u}_{P_1}/\operatorname{Ad}(K \cap P_1) < \infty$ が成り立てば、任意の $\mathbb{O} \in \pi_1^{-1}(\mathcal{O})$ に対して、冪零多様体 $\mathcal{N}_X(\mathbb{O})/K$ 上の K 軌道は有限個である。

例 5.4. AIII 型の対称対 $(G, K) = (\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q)$ を考える。
$Q = B_K$ を K の Borel 部分群とし、P を G の極大放物型部分群とする。このとき二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ は有限型であることが分かっている。
P_1 を G の θ 安定な極大放物型部分群で P と共役なものに取る。このとき $P_1 \in \mathfrak{X}_P$ を通る K 軌道は閉軌道である。箙の表現などを考えると $\#\mathfrak{u}_{P_1}/\operatorname{Ad}(K \cap P_1) < \infty$ であることが比較的容易に確認できるので、この場合 $\pi_1(\mathbb{O}) \subset \mathfrak{X}_P$ が閉 K 軌道であれば、$\#\mathcal{N}_X(\mathbb{O})/K < \infty$ が成り立つ。

対称対の二重旗多様体に付随する Steinberg 多様体の理論は未だ端緒についたばかりであり、やるべきことがたくさん残っている。特に実リー群の認容表現との関係や、ヘッケ環の表現との関係など、これからの解明と理論の発展が待たれる。

References

[AG90] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin, *On Stein extensions of real symmetric spaces*, Math. Ann. **286** (1990), no. 1-3, 1–12.

[DR09] J. Matthew Douglass and Gerhard Röhrle, *The Steinberg variety and representations of reductive groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 11, 3158–3196.

[FGT09] Michael Finkelberg, Victor Ginzburg, and Roman Travkin, *Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **14** (2009), no. 3-4, 607–628.

[FNO11] Lucas Fresse, Kyo Nishiyama, and Hiroyuki Ochiai, *Nilpotent variety for double flag variety (tentative)*, 2011, notes (preprint in preparation).

[HNO11] Xuhua He, Kyo Nishiyama, and Hiroyuki Ochiai, *Double flag varieties of finite type and parametrization of orbits*, 2011, notes (preprint in preparation).

[Ike07] Takeshi Ikeda, *Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian*, Adv. Math. **215** (2007), no. 1, 1–23.

[IMN11] Takeshi Ikeda, Leonardo C. Mihalcea, and Hiroshi Naruse, *Double Schubert polynomials for the classical groups*, Adv. Math. **226** (2011), no. 1, 840–886.

[IN09] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, *Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 10, 5193–5221.

[KNOT11] Kensuke Kondo, Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, and Kenji Taniguchi, *Closed orbits on partial flag varieties and double flag variety of finite type*, 2011, preprint.

[KO08] Bernhard Krötz and Eric Opdam, *Analysis on the crown domain*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), no. 4, 1326–1421.

[Krö07] Bernhard Krötz, *Corner view on the crown domain*, Jpn. J. Math. **2** (2007), no. 2, 303–311.

[Kon11] Kensuke Kondo (近藤健介), 放物型部分群の交わりと有限型二重旗多様体 *(Intersection of parabolic subgroups and double flag variety of finite type)*, 2011, 2011 年度 表現論シンポジウム講演集.

[Lit94] Peter Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra **166** (1994), no. 1, 142–157.

[Mat10] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, ArXiv/1011.6468 (2010).

[MWZ99] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118.

[MWZ00] ———, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Algebra **230** (2000), no. 1, 245–265.

[NO11] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, *Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits*, J. Lie Theory **21** (2011), no. 1, 79–99.

[Nis11] Kyo Nishiyama (西山享), *spherical* な群作用と多重旗多様体 *(Spherical group actions and double flag varieties for a symmetric pair)*, 2011, 2011 年度 表現論シンポジウム講演集.

[Och11] Hiroyuki Ochiai (落合啓之), 対称対の有限型二重旗多様体, 2011, 2011 年度 表現論シンポジウム講演集.

[PR93] Piotr Pragacz and Jan Ratajski, *Pieri type formula for isotropic Grassmannians; the operator approach*, Manuscripta Math. **79** (1993), no. 2, 127–151.

[PR97] P. Pragacz and J. Ratajski, *Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; $\tilde{Q}$-polynomial approach*, Compositio Math. **107** (1997), no. 1, 11–87.

[Ste76] Robert Steinberg, *On the desingularization of the unipotent variety*, Invent. Math. **36** (1976), 209–224.

[Ste88] ———, *An occurrence of the Robinson-Schensted correspondence*, J. Algebra **113** (1988), no. 2, 523–528.

[Tra09] Roman Travkin, *Mirabolic Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, Selecta Math. (N.S.) **14** (2009), no. 3-4, 727–758.

Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University, Fuchinobe 5-10-1, Chuo, Sagamihara 252-5258, Japan

E-mail address: kyo@gem.aoyama.ac.jp