数学の楽屋裏 ― 本音と建て前 ―

小林昭七

(これは話の概要というよりも話の中の難しい点に重点をおいて書いたものであるから、ノートをとることに夢中にならず話を聴いて頂きたい。)

よく「学問としての本当の数学は古代ギリシャに始まる」と言うが、実際、それ以前のエジプトやバビロニアの数学ではいろいろ複雑な問題を解く技術は発展したが公理に基いて論証する数学を創ったのはギリシャ人である。このギリシャ数学の最大の遺産であるユークリッド(だいたい、紀元前330-275) の「原論」13巻は定義、公準、公理、命題、証明という形式で書かれていて、動機や直観的説明とか応用、例といったことは避け、数学を一つの体系として少しの無駄もなく論理的にまとめたものである。これは以後数学の本を書くときの典型となった。

ユークリッドは全く自明と思われる命題のうち、数学一般に通用するものを公理、幾何学に特有なものを公準として仮定し、他の命題を論理により導いたのであるが19世紀に入ってユークリッド幾何の第5公準 (平行線公理と通常よばれる) を否定した命題を公理とする新しい幾何 (非ユークリッド幾何) が発見されたことにより、公理は「自明な命題」ではなくて「理論を展開するための仮定」と考えられるようになり、ヒルベルト (1862-1943) の公理主義が現代数学の基本思想となった。

数学の論文、専門書は通常、定義、定理、証明の繰り返しで書いてある。もちろん、時には応用とか例が間に入ることはあっても定義、定理、証明の基本的パターンに変りはない。

これは、数学者がその定理を発見したときの過程とはかなりちがう。だから専門の数学者でも他人の論文を読むと、論理的には証明をたどれても、本当に分ったという気分にならないことがある。これは学生が数学の本を読んでよく経験することである。数学にもよそ行きの顔と素顔がある。

その素顔を見せてくれる数学者もいる。シラクサのアルキメデス (紀元前287?-212) は古代ギリシャ最大の数学者であるだけでなく、数学の歴史のなかでも彼ほどの人は高々数人しかいない。アルキメデスが最も誇りにしていた仕事に「球と円柱について」という著作がある。この論文で彼は球の表面積は、図1のように外接する円柱の表面積の $\frac{2}{3}$ に等しく、球の体積は外接する円柱の体積の $\frac{2}{3}$ に等しいことを証明している。それだけではなく、図2のように水平な平面で円柱と球を截ったとき切りとられた球の部分の表面積と切りとられた円柱の部分の側面積の等しいことまで証明している。今読んでも感心するような厳密な証明である。しかし、これらの結果にどのようにして到達したかを「力学の定理による方法」という著作で説明している。そこで彼は、数学の問題を先ず力学を使って答を見付けてから幾何学的なきちんとした証明を付けることが有用であることを強調している。答を知ってから証明を考える方がずっと易しいというわけである。

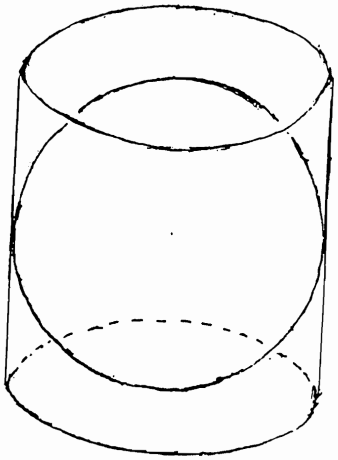


図 1

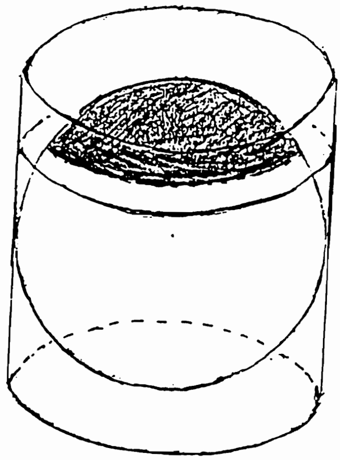


図 2

図 3

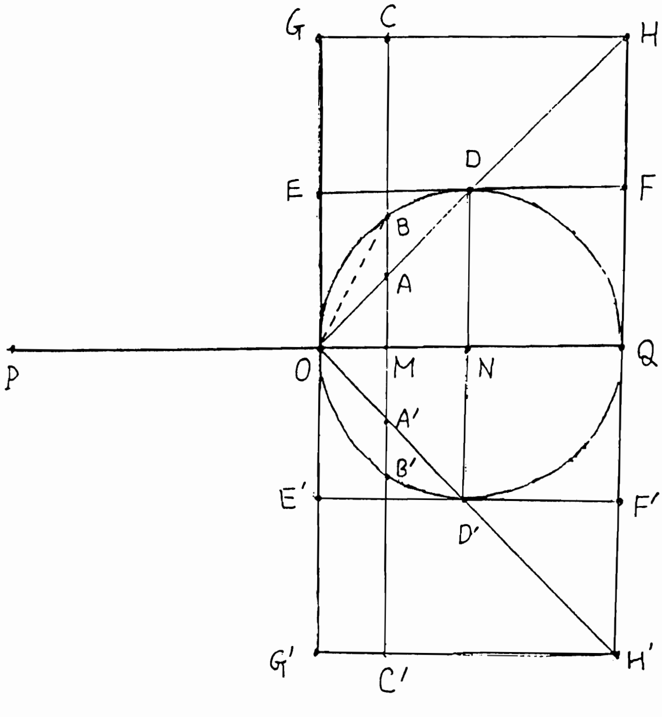


図 4

ここで使うのは図3のように支点から距離 a_1 のところに重さ m_1 の物を載せ、反対側に距離 a_2 のところに重さ m_2 の物を載せたとき、$a_1 m_1 = a_2 m_2$ ならはかりはバランスがとれるという梃子(てこ)の原理である。

球の体積が外接する円柱の体積の $\dfrac{2}{3}$ になるという定理をアルキメデスは力学的に次のように証明する。図4で PQ を軸として円 $ODQD'$ と正方形 $EFF'E'$ を回転すると球と外接する(横たわった)円柱ができる。長方形 $GHH'G'$ を回転すると倍の半径の円柱ができ、三角形 OHH' を回転して円錐ができる。M は OQ 上を動く点と考える。$\overline{OM} = \overline{AM}$ だから

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 \qquad \text{(ピタゴラスの定理)}$$

一方

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OQ} \qquad (\triangle OMB \sim \triangle OBQ \text{ だから})$$

$\overline{OQ} = \overline{CM}$ だから

$$\begin{aligned}\left[\overline{CM}^2 : \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right] &= \left[\overline{OQ}^2 : \overline{OM} \cdot \overline{OQ}\right] \\ &= \left[\overline{OQ} : \overline{OM}\right] \\ &= \left[\overline{OP} : \overline{OM}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(AA') &= AA' \text{を回転してできる円(の面積)} = \pi\,\overline{AM}^2 \\ K(BB') &= BB' \qquad〃 \qquad〃 \qquad = \pi\,\overline{BM}^2 \\ K(CC') &= CC' \qquad〃 \qquad〃 \qquad = \pi\,\overline{CM}^2 \end{aligned}$$

とすると

$$\left[K(CC') : K(AA') + K(BB')\right] = \left[\overline{OP} : \overline{OM}\right]$$

POQ を O を支点とするはかりと考えると

円 $K(CC')$ はそのままの位置に置き、

円 $K(AA')$ と $K(BB')$ を P のところにもってきたとき、

はかりはバランスがとれる。

そこで M を O から Q まで動かして全部加えると、

円柱 $(GHH'G')$ をその重心 N におき、

円錐 (OHH') と球 $(ODQD')$ を P においたとき、

はかりはバランスがとれる。したがって

$$2\,(\text{円錐}\,(OHH') + \text{球}\,(ODQD')) = \text{円柱}\,(GHH'G')$$

$$\begin{aligned} 2\,\text{球}\,(ODQD') &= \text{円柱}\,(GHH'G') - 2\,\text{円錐}\,(OHH') \\ &= \frac{1}{3}\text{円柱}\,(GHH'G') = \frac{4}{3}\text{円柱}\,(EFF'E') \end{aligned}$$

そしてアルキメデスは「球と円柱について」では表面積を先ず求めたが最初は上のようにして体積を求め、それから、球を表面を底とし、中心を頂点、半径を高さとする錐と考え

$$\frac{1}{3}(\text{表面積} \times \text{半径}) = \text{体積}$$

という関係式から表面積を見付けたと述べている。

物理、工学における仕事も含めてアルキメデスは球と円柱に関する仕事を最も誇りにしていたので彼の遺言に従って墓石は円柱には内接する球が彫ってあったという。

スイスの数学者オイラー (1707-1783) は 18 世紀最大の数学者であっただけでなく、アルキメデスと同様数学の歴史のなかでも数人中の一人に数えられる偉大な数学者だった。彼の肖像画はスイス 10 フラン紙幣に使われているが、私の知る限り数学者で紙幣になっているのはオイラーの他にはドイツの 10 マルク紙幣のガウスだけである。オイラーはしばしば類似を使って論理的には不完全だが正しい結果を出した。次の例は特に有名である。

同じスイスのヤコブ・ベルヌイ (1654-1705) とその弟のヨハン. ベルヌイ (1667-1748) はニュートンやライプニッツと同時代のえらい数学者で、いろいろの級数の和を求めたが級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

の和はとうとう求めることができなかった。

以下、上の級数の和を $\zeta(2)$ と書くことにする。(2 乗のところを 3 乗、4 乗、$\cdots$ にしたときは $\zeta(3)$, $\zeta(4)\cdots$ と書く。) 当然、誰でも最初に試みるのは上の級数の最初の何項かを足してみて近似値を求め極限が何であるか見当をつけることである。1728 年ヨハンの息子ダニエル (1700-82) はゴールドバッハに宛てた手紙でこの級数の和 $\zeta(2)$ は大体 1.6 であると述べた。 それに対してゴールドバッハは翌年 $1.6437 < \zeta(2) < 1.6453$ であると返事した。

ダニエルからこの問題を聞いたオイラーは先ず $\zeta(2)$ が 1.644934 に近いことを証明した (1731)。近似値を計算するには級数を十分先きの項まで足せばよいから誰でも出来るかと思うかも知れないが、この級数の収束の速度は非常に遅く、例えば最初の 10 項を足したのでは 1.55 にもならず、残りの項の和を評価してやっと $1.64 < \zeta(2) < 1.65$ という程度の近似しか得られない。オイラーが得たような良い近似を特別な工夫もせずに得るには 1000 項も足す必要がある。彼は実に上手い方法で次のようにずっと収束の速い級数で置き換えたのである。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = 1+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^3\cdot 4^2}+\cdots+(\log 2)^2.$$

この級数を使えば最初の 11 を加え残りの項の和を評価するこによって私でも全く手の計算で近似値 1.644934 を出すことができる。しかし、この近似値をいくら眺めても $\zeta(2)$ がどんな数を表すのか全然見当も付かない。

時間も限られているので近似値に関する話はこれで打ちきってオイラーがはじめて $\zeta(2)$ の正確な値を発見したときのすばらしいアイデアについて話をする。

その準備として多項式の係数と根の関係について復習をしておく。ここで必要とするのは定数項と1次の項の係数だけである。n 次の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

の解を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \\
&= (-1)^n a_n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \\
&\qquad + (-1)^{n-1} a_n(\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})x \\
&\qquad\quad + \cdots
\end{aligned}$$

だから

$$a_0 = (-1)^n a_n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n, \tag{1}$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} a_n(\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}). \tag{2}$$

(2) の左辺を (1) の左辺で、(2) の右辺を (1) の右辺で割って

$$\frac{a_1}{a_0} = -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right). \tag{3}$$

多項式

$$g(t) = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + \cdots + a_n t^{2n}$$

で $x = t^2$ とおけば $g(t) = 0$ の解は $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$、すなわち

$$t = \pm\sqrt{\alpha_1},\ \pm\sqrt{\alpha_2},\ \cdots,\ \pm\sqrt{\alpha_n}$$

だから $\beta_1 = \sqrt{\alpha_1},\ \beta_2 = \sqrt{\alpha_2},\ \cdots,\ \beta_n = \sqrt{\alpha_n}$ とおけば

$$\beta_1,\ -\beta_1,\ \beta_2,\ -\beta_2,\ \cdots,\ \beta_n,\ -\beta_n$$

が $g(t) = 0$ の解である。$\alpha_1 = \beta_1^2, \alpha_2 = \beta_2^2, \cdots, \alpha_n = \beta_n^2$ だから (3) によれば

$$\frac{a_1}{a_0} = -\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\beta_n^2}\right). \tag{4}$$

そこで $\sin t$ のべき級数展開

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

を考える。$\sin t = 0$ の解は $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$ だから t で割って

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \cdots \tag{5}$$

を考えれば、その根は $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$ である。これを無限次の多項式と思って (4) を使う。今の場合 (5) では $a_0 = 1, a_1 = -\dfrac{1}{3!}$ だから

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots\right).$$

すなわち

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right),$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{6}$$

他の数学者に言われるまでもなく、オイラー自身、有限次多項式に関する結果をベキ級数に適用するこの証明には少々無理があることは承知していた。しかし (6) の左辺の級数も $\dfrac{\pi^2}{6}$ も小数点 6 桁まで 1.644934 と一致すること、同じ方法で既知のグレゴリーの式

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

も証明できることから (6) が正しいことは確信していた。

それから 10 年位してからオイラーはきちんとした証明を発表した。その証明を終りに付けておくので興味ある方は、後でゆっくり読んで頂きたい。

現在では次のような無限乗積の公式が知られておりオイラーの最初の証明も正当化されていることを付け加えておく。

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

上のアルキメデスとオイラーの例が示すように、最初はもっともらしいが完璧ではない証明で定理を得るということは現在でもよくある。

証明だけでなく、定義、定理、証明という論理的な順も数学が創られていく過程では必ずしも守られない。例えば曲線の長さは図 5 のように曲線上に点をとり、それを順に線分で結び、得られた折れ線の長さで近似する。とる点の間隔を小さくして段々近似をよくし、その極限として曲線の長さを定義するのが普通である。同様に曲面の面積は内接する多面体の表面積で近似することによって定義したくなる。実際、19 世紀後半に使われていた微積分の教科書で、そのような定義を使っているのがあった。しかし、そのような定義では円柱の表面積の正しい値が得られないことを、ドイツの H. A. シュヴァルツが示したのは有名な話である。図 6 の点線で示したような多面体で近似する。(誰が付けたのか知らないが日本ではシュヴァルツの提灯という実に巧い名で呼ばれている。ここでは底面の円は 8 等分、高

さの方2等分してあるが、高さの方を10等分ぐらいした図を考えてみれば如何にも提灯らしい形になる。）この多面体は凸でないことを注意しておく。

一般に底面の円を $2m$ 等分、高さを n 等分し、$m, n \to \infty$ としてみる。m が ∞ に行く速さと n が ∞ に行く速さを加減することにより多面体の表面積の極限はどのようにでもできる。∞ にさえもできる。

アルキメデスは曲面の面積の定義が容易でないことを気付いていたらしく、凸な曲面の面積の場合だけしか考えないのである。そのとき内接する凸多面体の表面積と外接する凸多面体の表面積により近似する方法をとっている。このように定義は論理的には定理より先きにくるべきだが実際には定理が成り立つように定義を与えるのである。

微積分を組み立てるときには、実数、収束、連続関数、微分、$\cdots$ という順が論理的だが、歴史的には、微分(17世紀)から実数(19世紀)と殆ど逆の順に定義されている。オイラーの時代には一つの具体的な式で表わされるものだけを関数と考えていた。19世紀に入って現在のような関数とか連続といった概念が定義されるようになった。コーシー(1789-1857)は収束の概念を定義したが、一様収束の概念にまでは到達しなかったので、連続関数の列が収束するときその極限の関数も連続であるというような誤りを冒した。彼はまた実数の定義も正しくできなかったので微積分で基本的なボルツァノ・ワイヤシュトラスの定理も証明できなかった。

しかし、このような話は大学の数学を勉強してからでないと理解できないので数学の本流からはずれるが、もっと易しい例で説明しよう。「迷路」というゲームを実際に公園でやってみると、紙の上でやるように先きが見えるわけでないから、行ったり戻ったりうろうろしている人がかなりいる。しかし必ず迷わずに迷路を抜け出る方法がある。目を閉じたままでもできる方法がある。右でも左でもよいが片手を迷路の壁につけ絶対に壁から手を離さないようにして歩けばよいのである。この方法では無駄足を踏むかもしれない、また右手を使うか左手を使うかで通る道も違うかもしれないが間違いなく出口に到達できるのである。では、何故そうすればできるのだろうか。証明するには迷路とは一体何かということをはっきりさせる必要があるということに気がつく。迷路を抜け出る方法、すなわち定理は分かっているが、迷路の定義が見付からないので、その方法が何故正しいか証明できないのである。定理の正しいことが証明できるように定義をするということは数学でよく行われるのである。解析学のいろいろな基本的定理が得られた後で、それを証明できるように実数がきちんと定義されたのである。

このように数学でも自然科学の場合と同様、実験そしてもっともらしいが厳密でない証明を経て数学的に正しい証明に到達することがあり、　定理や証明が先にあってそれを正当化するように新しい定義や概念を導入することが珍しくないということ分かって頂くのがこの講演の目的でした。御静聴有難うございます。

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ の証明

(オイラー全集, シリーズ I, 第 14 巻, pp177-186)

まず

(1) $$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\sin^{-1}x \text{ は } \arcsin x \text{ のこと}\right)$$

だから $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ のテイラー展開

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}u^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}u^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}u^n+\cdots$$

を使って

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}$$

これを 積分して

(2) $$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

一方, (1) により

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x$$

だから

(3) $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{8}$$

左辺の積分を $\sin^{-1}x$ に (2) を代入して計算してみる。それには $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求める必要がある。$x=\sin t$ と変数変換すると、$dx=\cos t dt$ だから

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt$$

右辺の積分を I_{2n+1} と書けば、部分積分により

$$\begin{aligned}I_{2n+1}&=-\cos t\cdot\sin^{2n}t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}2n\cos^2 t\cdot\sin^{2n-1}t\,dt\\&=2n\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^{2n-1}t\,dt=2nI_{2n-1}-2nI_{2n+1}\end{aligned}$$

したがって $(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}$、すなわち

(4)
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}I_{2n-3} = \cdots = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

項別積分により

(5)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(5) に (4) を代入すると

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

(3) とくらべて

(6)
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る。

$$\begin{aligned}
1 &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

だから

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

これから

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る。

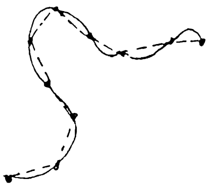


図 5

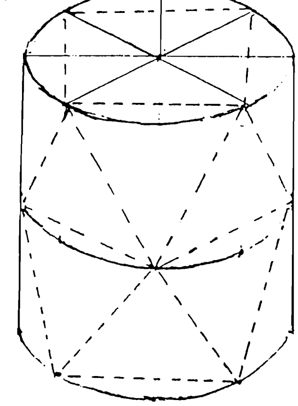
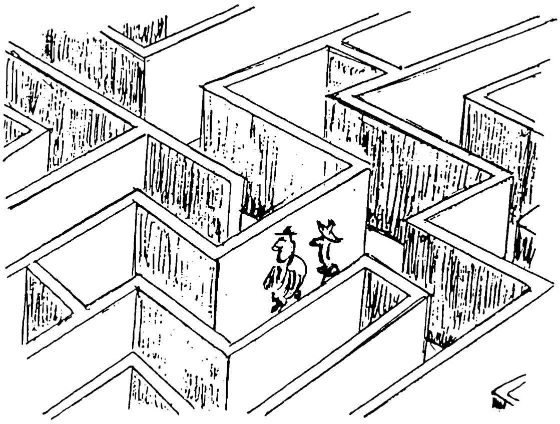


図 6



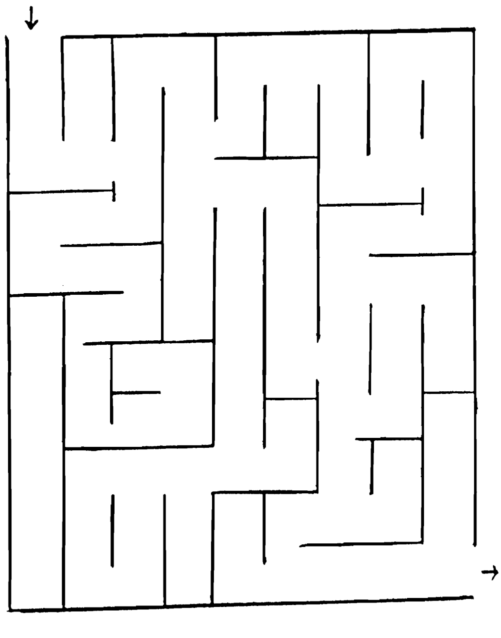
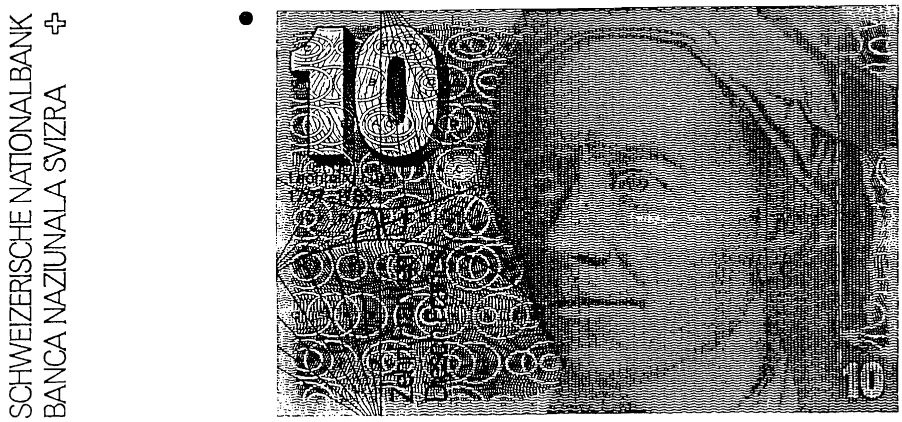
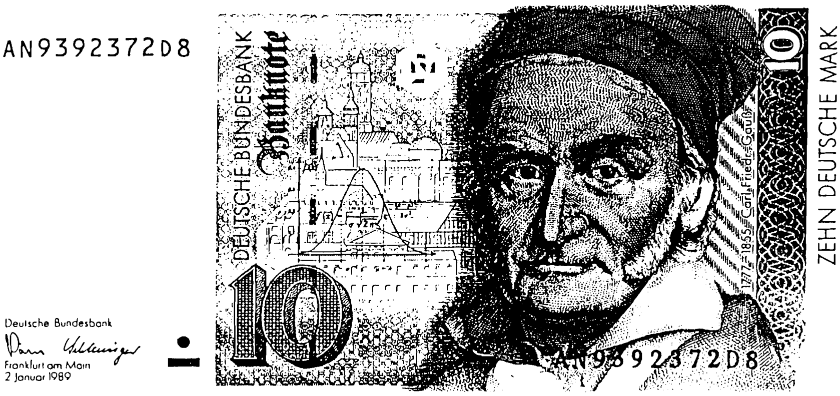


図 7

アルキメデスの死（モザイク，フランクフルト美術館）



オイラー（スイス10フラン）



ガウス（ドイツ10マルク）

（こばやし しょうしち，カリフォルニア大学バークレイ校）