自然界に現われる紋様・パターンの理解に向けて
ー数学からの歩みよりー

三村　昌泰（東京大学大学院数理科学研究科）

＜まえがき＞

本稿は１９９７年１０月東京大学駒場キャンパスで行われた日本数学会主催市民講演会での話を少し加筆、修正したうえでまとめたものです。

１　はじめに

小さい頃、空に浮かぶ雄大な雲の形、あるいは動物園や水族館でみた鳥、虫、魚等の皮膚に現われるパターンの多様さそしてその美しさを見て、自然が我々人間の手を借りずに、独自に作りあげたということに心を動かされたことはないでしょうか。　自然が作り上げた芸術品の筆頭は恐らく雪の結晶でしょう。雪の結晶は、「空中に漂う（氷の温度より低い温度の）水蒸気分子が雪の結晶核に凍り付いて固体分子になり、それらが「規則正しく」「周期的に」並んでいく過程」と述べることができますが，その形状はすべて６方対称という基本対称性を持ちながら、千差万別でそれぞれ実に神秘的な美しさを持っています。一つの例として、図１のような、あたかも木に枝が生えているような樹枝状（デンドライト）パターンは良くご存じの結晶形でしょう。

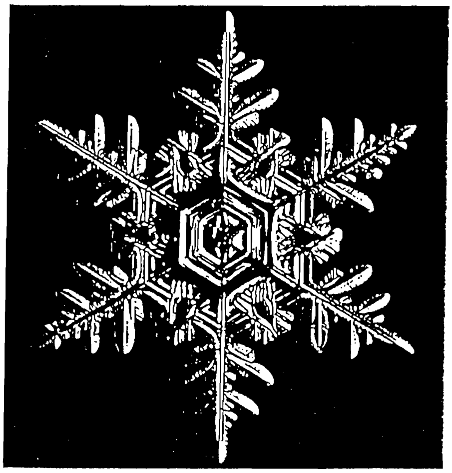

図１　雪の結晶[1]

このような繊細で美しい「雪の華」は、空の上に芸術家がいて、彼等が色々な形をした鋳型を設計し、その鋳型で氷を作り、それを地上にばらまいているのではなかろうかと想像しても不思議ではありません。

雪の結晶の美しさに魅了された人達は古今東西数多くいます。雪の結晶を最初にスケッチしたのは、１５５５年ウプサラの大僧正オラウス・マグナスであることはその出版物によって知ることが出来ます。しかしながら、そこでは雪の結晶が６方対称性を持っていることには気がついていません。これに気がついたのは惑星運動の法則を発見したドイツの天文学者ケプラーです。続いて，ケプラーの本を読んで雪に興味を持ったのがフランスの哲学者デカルトです。図２が彼自ら観察した雪の結晶のスケッチです。興味深いのは６方対称性だけではなくて１２方対称性を持った允ずらしい雪の結晶の絵も描かれていることですが，これは彼の観察ミスではなくて，現実に観察されることがあるようです[1]。

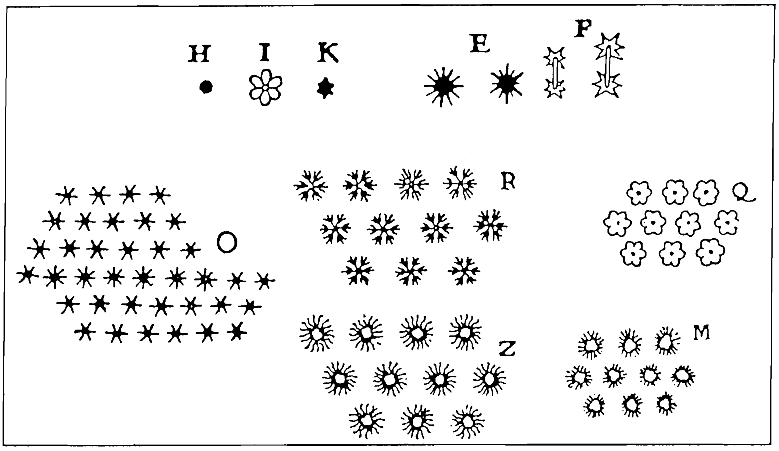

図２　デカルトの雪の結晶のスケッチ[1]

やがて顕微鏡が発明される時代に入ります。この結果、雪の結晶のスケッチは長足の進歩をとげることになります。イギリスの物理学者であり、バネの伸びに関するフックの法則の発見者でもあるフックは顕微鏡観察が好きな人だったようで、かなりの数の雪の結晶形をスケッチしています。　一方、我が国で有名なのは、当時下総国古河城の殿様であっ

た土井利位が出版した「雪華図説」（木版刷り）に載っている雪の結晶のスケッチです。彼はオランダから渡って来た顕微鏡を用いて１００個あまりの雪の結晶を描いているのです[1]。

雪の結晶は組み込まれるべき蒸気分子が結晶核を取り囲む環境相において希薄に分布しているときの成長過程ですが[2]、この他の結晶成長として、水が凍って氷になるとか、高温で融けていた金属が冷却されて固体になる、いわゆる「凝固」現象があります。雪の結晶と異なる点は，「凝固」では環境相に結晶に取り込まれるべき分子が濃厚に分布しているということです（ちなみにこのような結晶成長は融液成長と言います）[3]。凝固温度より低い温度の液体（これを過冷却液体と言います）の凝固に見られる結晶パターンがが図３です。このように過冷却凝固の現われる形状は、冷凍庫の氷皿で作られるおなじみの凝固とはまったく異なり、図１の雪の結晶と同じようなパターンが現れるです[4]。

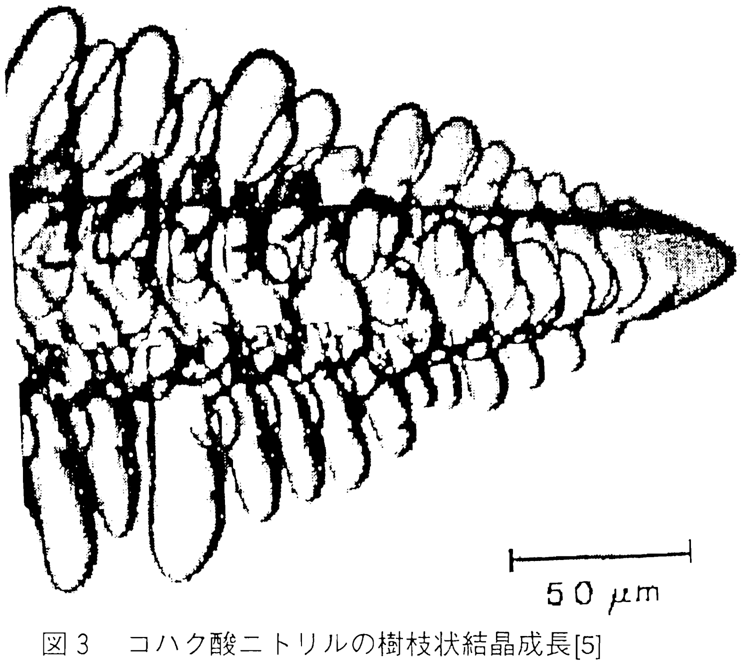

図３　コハク酸ニトリルの樹枝状結晶成長[5]

このように自然は、我々人間の手を借りずに、あたかも前もって設計した図に合わせたかのように美しい形、パターンを作りだし、我々を楽しませ、そして不思議がらせるのです。

2　形、パターンとは

我々が形、パターンを眺めて、美しいと感じるとき、それらは対称性（シンメトリー）と密接に関係している場合が多いのではないでしょうか。１９５２年，ドイツの数学者ワイル（Hermann Weyl）は彼の著書「シンメトリー」[6]において次のように述べています。

「日常的な意味では、対称的であるとは均整がとれていて、バランスが良いことを意味します。このとき、対称性とは、各部分を全体に統合する一種の調和を表現しています。まさに、美は対称性と密接に関係しているのです・・・」[7]

例えば、バランスという言葉のイメージは直ちに左右同形対称性（あるいは鏡映対称性という）を思い浮かべるでしょう。これは高等動物（例えば、人間）の形態構造において顕著に見ることが出来ます。更に、別のタイプの対称性を見ることも出来ます。図４のような５つの腕を持つヒトデです。

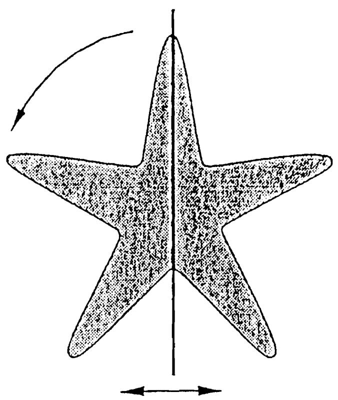

図４　ヒトデの対称性

このヒトデには左右同形対称性の他に、72 度の回転対称性を持っていることがわかるでしょう。この他にも、例えば、任意の角度の回転対称性を持つ円や球の形状は到る所で見ることが出来ます。このように自然界においては高い対称性から低い対称性まで様々な対称性をもつ形・パターンが存在しています。

さて、このような対称性に関して、今から１００年ほど前ピエール・キュリー（妻マリーと一緒に放射能の研究を行い、ラジウムとポロオニウムの元素を発見した物理学者）は「理論・応用物理学会誌」において「あることが原因となって、ある結果が起こるとき、原因がもつ対称性はそれによって生じる結果の中に再び現われる」というパラダイムを発表しています。例をあげて説明しましょう。

機体が完全に左右対称な飛行機が飛んでいる状況を考えます。空気は気体力学の法則に従って、機体の周りを通りすぎていきます。それらの法則は左右対称性のもとで不変ですから、原因となる空気の流れが飛行機の前方で左右対称性であれば、飛行機を通過した後の流れもやはり左右対称性であるというのがキュリーの原理なのです。

この原理はちょっと見ると、正しいように思われます。しかし実際の飛行はどうでしょうか。実は，飛行機の周りを通過する空気の流れは左右対称ではなく、ほぼ５分毎に機体の尾部を３０センチ程振りながら飛行するのだそうです。つまり，キュリーの原理は否定されることになるのです。

もっと手短な例をあげましよう。これはカタストロフイー理論で有名なイギリスの数学者ゼーマン（Christphor Zeeman）によって考案された「対称性破れ」のおもちゃです。

円盤状の厚紙を作り、適当な大きさの板の上にその中心を画鋲で止めます。円盤の縁近くにもう一つの画鋲を逆に裏側から針を上に向けて刺します。円盤の下方に釘を打ち、この逆さに刺した画鋲に２つのゴムバンドをくっつけ、一つは下方にある釘にくっつけ、もう一つのゴムバンドを上に引き伸ばすことを考えましょう。このおもちゃは円盤の中心とその下方にある釘を通る直線を考えれば、それに関してに左右対称です。このとき、ゴムバンドを垂直に上に引き伸ばすことにします。この動作もやはり左右対称であると考えられます。従ってキュリーの原理が成り立つとすれば、それによって生じる結果は左右対称でなければなりません。実際にやって見ましょう。

ゴムバンドの伸びが小さいときには、ただゴムバンドが伸びるだけで何も起こらず、結果は左右対称で、キュリーの原理は成り立ちます。しかしながら、伸びを大きくしていくと、円盤は突然回り始めます。このとき、行きがかり上、円盤は右回りと左回りの２つの回り方があります。こうして、左右対称性が破れ、キュリーの原理は破綻するのです。もちろん、いくら伸びを大きくしても、円盤がまったく動かないという状態も存在するように思われますが、実際には短時間しか持続せず、無理なことは予想されるでしょう。

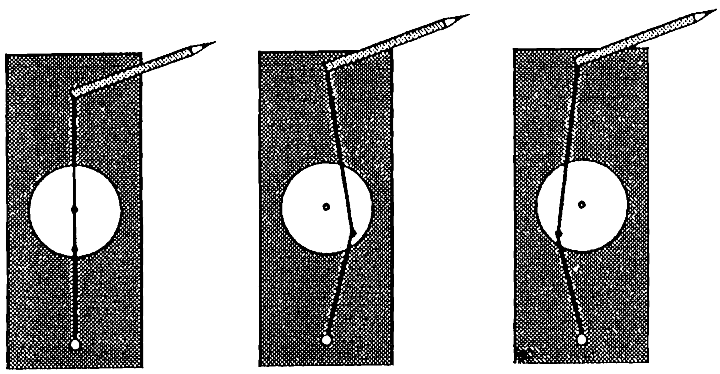

図５　対称性破れのおもちゃ[7]

この実験は、「キュリーの原理」が間違っているのか，あるいは「実験の仕方」がまずいのかのいづれかをを示していることになります．さて答はどうでしょうか．これついてもう少し考えてみることにしましょう．

自然界には数学で言うような完全な対称性は存在しない！

数学で言うところの対称性はまったく完全なものであると我々は暗黙のうちに認めていますが、自然界には完全な対称性を持った形状はほとんど存在しません。対称性を持った

形状には目に見えない小さい「こぶ」「やくぼみ」があったりします。先ほどのおもちゃでは、まったく完全な円対称性をもつ円盤を切り取ることは非常に難しいということです。仮りに、非常に器用な人がいて完全な円盤を切り取ることが出来たとしても、次にゴムバンドをまったく完璧に垂直に引き伸ばすことは容易なことではないでしょう。このことは、自然界には微少な「でこぼこ」、「ずれ」あるいは「ゆらぎ」等の微小擾乱（乱れ）が常に存在していると考えなければならないことを示唆しています。

微小擾乱は減衰したり、増大したりする！

それにもかかわらず、形・パターンがある対称性をもって我々の前に存在しているということはその対称性が微小擾乱に対して安定であることを意味します。喩えて言えば、曲がらない針金につるされたボールを考えます。つり下げられた状態は、少し位揺らしてもすぐ元の状態にもどり、「安定」ですが、その逆に、ボールを垂直に持ち上げた状態を考えると、ほんのかすかなゆれでぐらついて倒れてしまいます、すなわち「不安定」であって通常存在しないのです。　このことから、微小擾乱が減衰する場合を安定、増大する場合を不安定と言います。先程のおもちゃに現われた結果に戻って考えますと、伸びが小さいときには左右対称性をもつ状態は安定であったが、伸びが長くなると、この状態は維持できず、円板は回転し、不安定になったということです。これを「安定性の崩壊」と言い、それによって「対称性は破れた」と言います。これを絵に描くと図６のようになります。

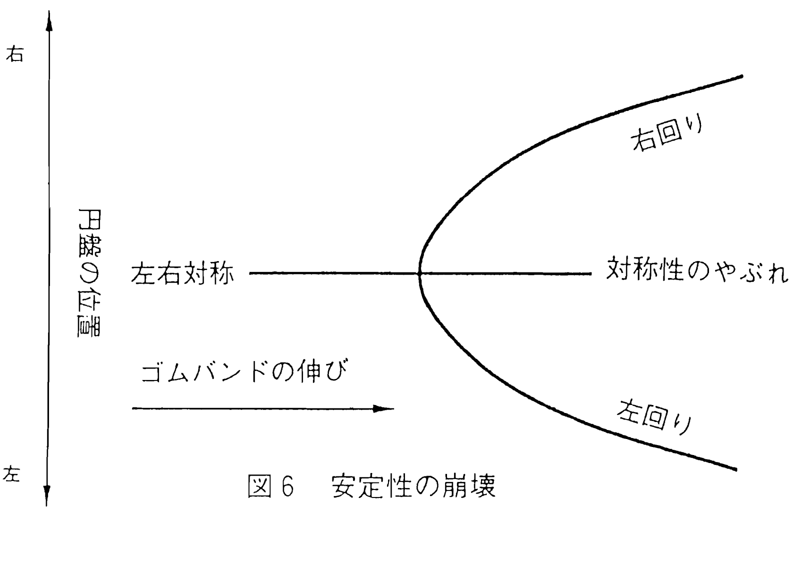

図６　安定性の崩壊

誤解をまねかないために注意しておきますが、もしも完全に対称な形状で、まったく微少擾乱は存在しない場合には，キュリーの原理は正しいのです。しかしながら、自然界に現われる形状にはその対称性にわずかのでこぼこがあるか、あるいは常に微少擾乱が存在していますから、キュリーの原理はそのままでは正しくないということです。対象とする形、パターンに対してそこに現われる微少擾乱が果たして減衰するのか，それとも増大するのか、つまり，安定かどうかを調べる必要があります。いかなる条件のもとで微少擾乱が減衰してその対称性は維持されているのか，あるいはいかなる条件のもとで対称性が破れるのか、そしてその結果，どのような対称性をもつ形、パターンに移っていくのかが問題になります。このような微少擾乱の行方に答えたのが解析学における安定性理論なのです[8]。

このような対称性の破れから生じた形、パターンの出現は自然界に数多くあり、生物の世界においても見ることができます。

3　生物の世界にも対称性破れがある

大人になったカエルは我々人間と同様に左右対称性しか持っていないことはあきらかで、その一生は対称性の高い「球形」である受精卵細胞 1 個から始まります。この細胞は卵割と呼ばれる分割を繰り替えしながら、球対称性が次々と破られて、より低い対称性を持った形状になっていきます。卵割の最初の段階において 2 細胞に分れるとき、ほとんど平面の膜で仕切られる対称な 2 つの半球が出来上がり、これらは更に 2 つに分割され，4 つの細胞となります。こうして見事な対称性の破れを見ることが出来るのです[9]。

この他の細胞分化の例として，動物の皮膚に現われる縞模様や斑点などの表皮パターンがあります。シマウマや豹など数々の動物の皮膚に現われる様々なパターンは色素細胞密度の空間分布に依存して決まります。生まれたとき一般に色素細胞は一様に分布されており、特徴的なパターンを見ることができません。しかしながら，次第に成長すると、色素細胞は空間非一様になり、縞状あるいは班点状に分布することになり、その結果表皮パターンが現われるわけです。つまり、空間一様という高い対称性が破れて、低い対称性を持った斑点や縞模様パターンが現われると解釈することが出来るのです[10]。

ここで次のような疑問が起こります。「これら細胞分化に現われる対称性の破れはどのような機構から起こるのだろうか？」

この問題に関心を持ったのがイギリスの数学者であり、論理学者でもあったチューリング（Alan Turing）です．１９５２年、著書「形態発生の化学的基礎」において，彼はこのような生物発生過程における細胞分化は次のように解釈されるのだと述べています.「細胞は最初はまったく均質であるかもしれないが、時間が経過し、ある時期になると、（例えば，微少な乱れが引き金になって）この均質な状態が不安定となり、それによってある種の構造すなわち、細胞分化が起こるのである」。

もっと簡単な例で述べましよう。

ここに２つの同じ均質の細胞（例えば、同じ赤い色のボール）が並んでいるとします。このとき、これらを交換して並べても、前と同じ状態ですから、左右同形対称です。ここで、ある時期に（例えば、遺伝子のスイッチがオンになって）２つのボールの状態が各々黄色と青色のボールになったとします。この結果２つの細胞はもはや左右対称性ではなくて、対称性の破れが起った、つまり細胞分化が起こったと解釈できるのです。これまで説明しました安定性の崩壊、対称性の破れをすでに理解している皆様にはチューリングの主張は当然のように思われるでしょう。しかしながら、重要なのはそれではどのような機構でこのような対称性の破れが起るのかということなのです。この問題に対してチューリングは拡散促進不安定性という原理を提唱したのです.

4　拡散促進不安定性とは？

先ず彼は、細胞の状態はいくつかの形態因子と呼ばれる化学物質で制御され、それらは、隣の細胞と拡散膜を通して出入りしていると考えました。この考えは、細胞の状態は、生物特有の現象ではなく、化学物質の反応による相互作用と拡散という物理・化学の法則で決定されているという大胆な発想なのです。喩えて説明しましょう。今水道からバケツに水を溜めるような状況を想像して下さい．このとき，水の分子一個一個にそれぞれバケツのどの位置に配置するかというほとんど不可能な詳細な設計図を前もって与えられているではなく、いつ水道の栓を開け、いつ閉めるのかというタイミングだけが重要で、水が

バケツのの中にどのようなプロセスで一杯になるかは物理法則に従って決定されます．この考えを細胞分化の話に戻しますと，水道の栓を開けるか、閉めるかに対応する遺伝子制御のスイッチオン、オフが生物的機構であり，その結果、形態因子が細胞内でどのような状態をとるかは物理・化学法則に従うということなのです。

このような考えを認めると、細胞の状態は物理・化学法則に従うので、数学モデルで記述されることが可能となり、その解析ができれば、それから状態が決定されるわけです。こうして数学が力を発揮できる場面が登場するのです。数学モデルが現象と数学の重要な橋渡しになることがわかるでしょう。そこで数学モデルについてもう少し説明しましょう。

まずいくつかの化学物質（例えば，赤や，青，緑の色を積極的に作り出す因子）を含む細胞が、図５のように、膜を通して結合されているとします．この膜は、細胞間の化学物質が濃度の高い細胞から，濃度の低い細胞へ濃度差に比例して流れ込む性質を持っているとします（「拡散」と言います）。

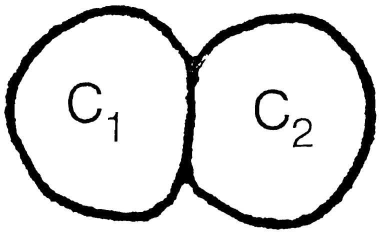

図５　拡散膜で結合された２つの細胞

この状況をモデルで表現すると次のようになります。２つの細胞（C_1, C_2 とします）を考え、時刻 t においてそこに含まれるの形態因子の濃度をそれぞれ $u_1(t)$, $u_2(t)$ とします。

時刻　t　から $t+\Delta t$ までの濃度の変化率は、上で説明しました「拡散」の性質を取り入れることから、次の式で表されます。

$$\{u_1(t+\Delta t) - u_1(t)\}/\Delta t = d[u_2(t) - u_1(t)] \qquad t > 0$$
$$\{u_2(t+\Delta t) - u_2(t)\}/\Delta t = d[u_1(t) - u_2(t)]$$

ここで左辺にある d は膜を通して因子がどれほど出入りするかというパラメターで、ここでは拡散率と呼びます。この式において Δt を零に近づけると、$u_1(t), u_2(t)$ に対する微分方程式が得られます。

$$u_1'(t) = d[u_2(t) - u_1(t)]$$
$$(1) \qquad\qquad t > 0$$
$$u_2'(t) = d[u_1(t) - u_2(t)]$$

ここで、'　は　t　に関する微分を表します。(1) の 2 つの式の和と差から、

$$[u_1(t) + u_2(t)]' = 0$$

$$[u_1(t) - u_2(t)]' = -2d[u_1(t) - u_2(t)]$$

が成り立つので、両式を解くことから

$$u_1(t) + u_2(t) = u_1(0) + u_2(0)$$

$$u_1(t) - u_2(t) = [u_1(0) - u_2(0)]\exp(-2dt)$$

を得ることができます。第 2 式は、十分時間が経つと，$u_1(t), u_2(t)$ はその濃度差がなくなることを示しており、この結果と第 1 式より、それらは共に初期濃度の平均値に近づくこ

とになります。、このことから(1) は「拡散」の特徴を示していることがわかります。

ここでまず

性質 1　細胞は拡散膜によって結合されている。

を仮定します。　次に、細胞内の状態を決定する因子の性質について考えます。細胞分化を積極的に進める因子を活性因子と呼び，それを抑える因子を抑制因子と呼ぶことにします。チューリングは細胞内にこれら 2 つの因子が入っており、次の 3 つの性質を持っていると考えました。

性質 2　活性因子は自己触媒的に増加するが、そのとき抑制因子をも作り出す；

性質 3　抑制因子は活性因子の増加を抑える；

性質 4　抑制因子はそれ自体は減衰する。

さて、性質 2 － 4 の性質を持つチューリングモデルを紹介しましよう．時刻 t での活性因子，抑制因子の濃度をそれぞれ A(t), I(t) とし、それらの相互作用を記述するモデルは次の 2 変数微分方程式

$$
(2)\qquad \begin{cases} A(t)' = 5A(t) - 6I(t) \\ I(t)' = 6A(t) - 7I(t) \end{cases} \qquad t > 0
$$

とします。第 1 式の右辺の第 1 項は自己触媒的に増加させる効果（性質 2 ）、第 2 項は抑制因子による抑制効果（性質 3 ）、第 2 式の右辺の第 1 項は活性因子によって作り出される効果（性質 2 ）、第 2 項は減衰効果（性質 4 ）を意味しています。ここで (2)の時間に依らない解（これを平衡解と言います）は (0,0) だけであることに注意しておきます。

さて、第 1 式から第 2 式を引くと、

$$[A(t) - I(t)]' = - [A(t) - I(t)]$$

となりますから、

$$A(t) - I(t) = [A(0) - I(0)]\exp(-t)$$

が得られます。従って、時間が経つと、 $A(t)$ と $I(t)$ が等しくなることがわかります。このことから、(2)をもう一度を見なおすと

$$A(t) \approx A(0)\exp(-t), \quad I(t) \approx I(0)\exp(-t),$$

となり、$(A(t), I(t))$ は $(0,0)$ に近づきます[11]。すなわち、$(0,0)$ は (2)の安定な平衡解であることがわかります。このことより、細胞の状態は（数学的には） $(A,I) = (0,0)$ であるとします。

これから2つの細胞（やはり C_1, C_2 とします）を考えますが、因子の濃度が同じであるとき、細胞は同じものであると言いましよう。

さて、この2つの同じ細胞をこれまで述べました拡散膜によって結合された状況を考えます。に対してチューリングは「もしもこの2つの細胞の因子濃度にわずかの擾乱が入ったとしよう。その結果、因子の濃度は変化するが、2つの細胞間での濃度差は拡散という性質のためにますます広っがていくことがある」という、パラドックスを主張したのです。

拡散というのは各細胞の濃度差を減らして、細胞の濃度を同じようにする性質であるにもかかわらず、チューリングはそれの逆の状況が起こり得ると言っているのですから、当然、当時の人達には信じてもらえませんでした。しかしながら、彼は数学モデルを提出して、その解析からこの可能性を示したのです。それを簡単に示しましょう。

2つの細胞 C_1, C_2 内の活性因子、抑制因子の濃度をそれぞれ $A_1(t), I_1(t)$ および $A_2(t), I_2(t)$ とします。ここで、先ほど紹介しました2つのモデル (1), (2) を思い出すと、$A_1(t), I_1(t)$, $A_2(t), I_2(t)$ の時間変化を記述する次の微分方程式が出来上がる訳です。

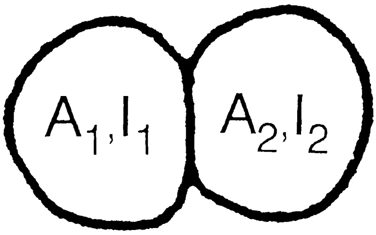

図７　拡散膜で結合された２つの細胞

$$A_1(t)' = 5A_1(t) - 6I_1(t) + d_A(A_2 - A_1)$$

$$I_1(t)' = 6A_1(t) - 7I_1(t) + d_I(I_2 - I_1)$$

(3)

$$A_2(t)' = 5A_2(t) - 6I_2(t) + d_A(A_1 - A_2)$$

$$I_2(t)' = 6A_2(t) - 7I_2(t) + d_I(I_1 - I_2)$$

(3)のすべての右辺の第３項は拡散を表わしており、d_A, d_I は活性因子、抑制因子の拡散率とします。チューリングはこのモデル方程式を解析して、拡散促進不安定性の可能性を調べているのですが、ここではその説明は省略して結果だけを図８でお見せしましょう]。

縦軸を抑制因子の拡散率 d_I、縦軸を活性因子の拡散率 d_A として、(d_A, d_I) - 平面上の第１象限を考えるとき、それを２つの領域に分ける曲線（B とします）があります。曲線 B の下方の拡散率 d_A, d_I に対して (3) を解くと、２つの細胞 C_1, C_2 は同じ平衡状態をとることが安定（つまり左右対称性）ですが、曲線 B の上方の拡散率では、同じ平衡状態は不安定で、細胞間の濃度差はどんどん広がっていくというわけです。つまり、拡散率の一つ d_A を固定します。このときもう一方の拡散率 d_I が曲線 B より下にあるときには２つの細胞は左右対称ですが、d_I の値がが曲線 B より上の値になったとすれば２つの

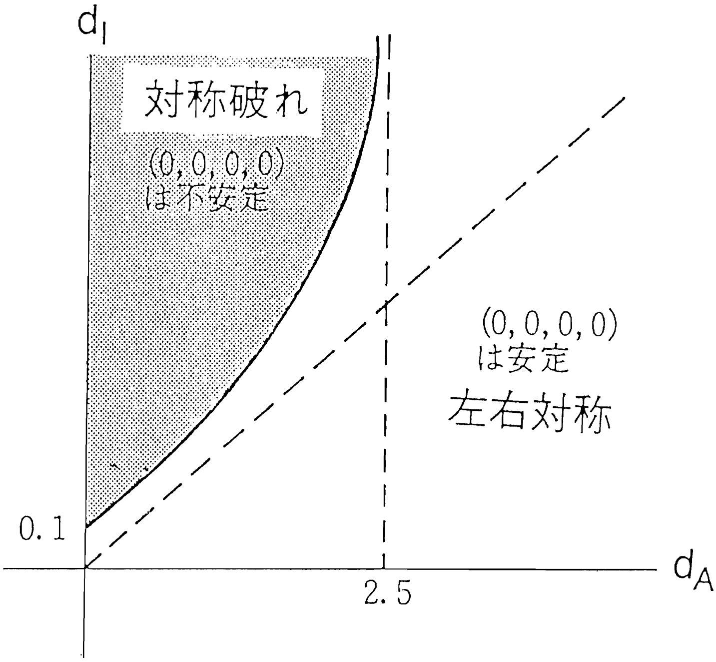

図 8　拡散促進不安定性

細胞が同じ状態になっていることは不安定になり、対称性が破れることを意味しています。このことを言葉で説明すると次のようになります。

いま拡散膜を通して抑制因子の出入りが活性因子に較べて速い（すなわち、$d_A < d_I$）場合を考えます。細胞 C_1 内の活性因子が何らかの擾乱によって濃度が少し増えたとしましょう。すると、性質 4 によって、それを抑える抑制因子濃度も増えることになります。しかしながら、抑制因子は活性因子に較べて拡散が速いので、より速くもう一方の細胞 C_2 内に流れ込むことになります。すなわち、本来、細胞 C_1 において活性因子の増加を抑える役目であった筈の抑制因子が速い拡散のためにもう一方の細胞 C_2 に速く入り、C_2 内の活性因子を抑えるということになるのです。その結果、細胞 C_1 内の活性因子は更に増え、それによって作り出された抑制因子は細胞C_2 に入り、そこでの活性因子を抑えることになり、2 つの細胞の濃度差はますます広がる、つまり、対称性の破れが起こるというわけです。拡散という性質を安直に理解している人には、拡散は 2 つの細胞の因子

濃度差を増大させるというパラドックスはなかなか信じられないことですが、チューリングは数学モデルを提出し、そこから得られる数学的結果に基づいて拡散促進不安定性が起こる可能性を示したわけです。更に、チューリングは拡散率の変更を命令しているのが遺伝子であると言っているのです。

このように、チューリングは細胞分化は生物的、化学的、物理的要素が交互に絡まって起こる対称破れ現象であると考えたのでした。しかしながら、このような考え方は発生生物学の世界ではなかなか認められていません。その理由はチューリングの拡散促進不安定性の中で重要な役割を果たす活性因子、抑制因子が現実の細胞分化において見つかっていないからです。そのような状況にあったにもかかわらず、数理生物学の世界においてチューリングの提唱した不安定性の研究は進められていたのです。１９８９年、当時オックスフォード大学にいたマレー(J.D. Murray) は動物の皮膚に現われるパターン機構の理解に対して、チューリングの拡散促進不安定性に基づく偏微分方程式モデルを導出し、その数値シミュレーションから、動物の表皮パターンは対称性破れから起こる可能性を示唆しました[13]。それが図９です。

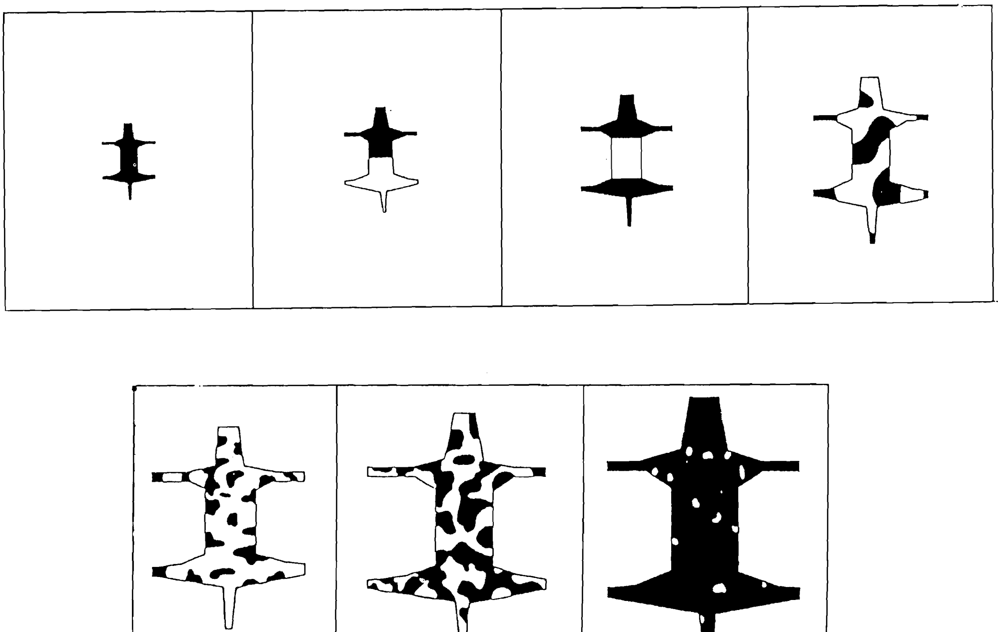

図９　チューリングパターンの数値シミュレーション[13]

この絵を見ると、何となくチューリングの考え方が正しいのではないか思われるでしょうが、まだまだそれは生物の世界で認められるまでには至りませんでした。

我々数学側からチューリングの提唱した拡散促進不安定性を考えると、それは、拡散そして活性因子と抑制因子が性質１～４のもとでの相互作用によって起こる現象であり、拡散率を何らかの手段で変えることができれば、この現象は何も生物学特有のものではなくて、もっと普遍性をもつ現象であるようにも感じることが出来ます。１９９４年、生物から離れた化学の世界に、拡散促進不安定性が起こる化学反応が現われたのでした[13]。そこで観察されたパターンが図１１です。この結果は生物の世界のみならず化学の世界においても驚きでした。動物の表皮に現われる紋様に似たパターンが化学反応に現われたからです。このことの重要な示唆はチューリングの考えがもしも性質２～４をもつ活性因子と抑制因子が存在するならば、対称破れが起こり、そこから対称性の低い新しいパターンが出現するということが確証されたことです。

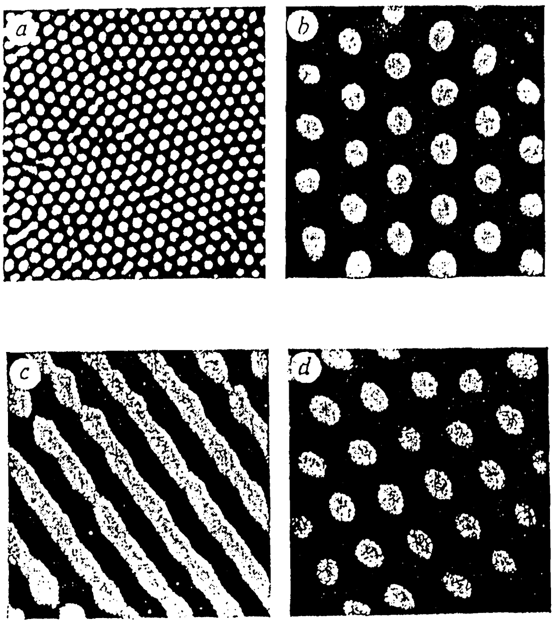

図１１　化学反応に現れるチューリングパターン[14]

それに呼応する形で、一昨年、科学雑誌 Nature に、近藤、浅井両氏の観察によって熱帯魚エンジェルフィッシュの縞模様パターンがチューリングの拡散促進不安定性から出現することを強く示唆した論文が発表されました[15]。その結果, その号の表紙に大きく「Turing pattern come to life」というタイトルが出たのでした。実にチューリングの仮説から４０年以上経っての出来事なのです。このような経緯に、数学モデルそしてその数学的解析が重要な役割を果たして来たことは言うまでもありません。

5　おわりに

これまで自然界には対称性破れの結果として様々な形・パターンが現われているという話をしてきました．しかし、最初に述べました過冷却凝固の結晶成長をこの視点から見ると、それほど面白くないのです。何故なら、凝固過程は図１２のように、初期状態そして最終状態のもつ対称性はとてもシンプルだからです。興味深いことは、その成長過程において図３でお見せしましたような、あたかも生きているような樹枝状パターンが観察されることです。このような系はやはり系の微小擾乱が本質となっている系ですが、「成長系」と呼ばれています。このような成長系を取り扱うことはこれまで数学の世界では不可能で

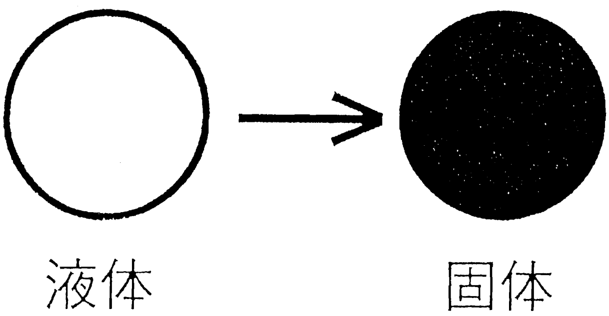

図１２　凝固過程

あり、むしろあまり近づかないようにしてきました。その理由は、対称性という rigid な形をもつ「平衡系」ではなくて、刻々とダイナミックに変化するパターンをもつ成長系であるからです。

しかしながら、最近、実験、モデリング、高速計算機シミュレーション、画像処理そして数学的解析等の専門家達が既存の分野を超えて、学際的視点からこの問題の研究に取り組もうという動きが現われました。そこには数学的厳密性を追及するより、むしろその系の背後にある機構を mathematical science から理解しようという立場です。このとき最も大事なことは如何に信頼できる数学モデルを導出するかということが重要です。この作業においては、現象、そして数学モデルの知識という複眼的な能力が要求されます。これに成功した例が次の図１３の計算機の中で見られる過冷却凝固の空間３次元数値シミュレーションの動画の１場面です。

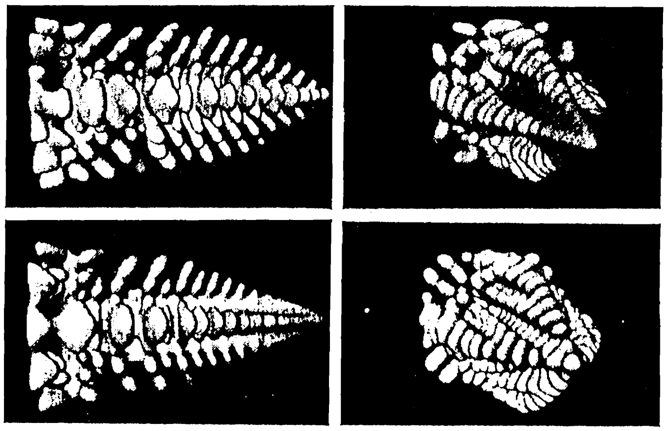

図１３　計算機の中での過冷却凝固[16]

mathematical science の立場から現象を理解しようということは数学的な厳密性を放棄するのではなくて、機構を理解するという motivation を第１義にするという考えから来ています。現在、図１３でお見せしましたような成長系の理解はまだまだ数値シミュレーションの域を出ていません。しかしながら、これを記述する数学モデルは存在しているのです。数学モデルがあるから数学的に扱えると考えるのは早計ですが、これまで数学の

世界から接近ができなかった問題に対して、数学との接点はすでにできたということは事実です。数学の新たな展開を期待したいもです。

＜あとがき＞

これからの文は講演会で話さなかったことです。

自然界に現れるパターンについて興味は小さい頃から持っていたが、、アカデミックな観点からやり始めたのは２０年ほど前であった。なんのはずみか赤潮シンポジウムのメンバーになって瀬戸内海に発生した赤潮を見たとき、プランクトンは本来乱流拡散によって移動するだけなのに、どうしてあのような高密度の斑状分布するのだろうかという疑問がなかなか頭から離れなかったが動機だった。その後、自然界の色々なパターンに出会い、色々な分野の人達との共同研究も出来るようになった。、（敬称は略させて頂きますが）、J. D. Murray (Univ. Washington), H. Othmer (univ. Utah), R. Miura (Univ. Britsh Columbia), W. Alt (Univ. Bonn), 小林　亮（北大）、沢田康次（東北大）、吉川研一（名大）、本多久夫（兵庫大）、山口智彦（通産省）、松下貢（中央大）、重定南奈子（奈良女子大）、川崎広吉（同志社大）の諸氏そしてこれまで一緒にやってきた元、現院生の諸君どうもありがとう。

参考文献

[1] 小林禎作、古川義純：雪の結晶　雪の美術館、1991

[2] 黒田登志雄：結晶は生きている　サイエンス社、1984

[3] 小林亮：結晶成長におけるパターン形成　数理科学８月号、1992

[4] 沢田康次：非平衡形の秩序と乱れ　朝倉書店、1993

[5] S. -C. Huang and M. E. Glicksman: *Acta Metallugia* 29 (1981) 717

[6] H. Weyl: Symmetry, Princeton University Press 1969

[7] I. Stewart and M. Golubitsky: Fearful Symmetry, Penguin Books Ltd., London
須田不二夫、三村和男訳：対称性の破れが世界を創る　白揚社、1995

[8] 力学系の安定性理論は数多く出ているが、例えば、E. A. Jackson: Perspectives of Nonlinear Dynamics 1,2　田中茂他訳：非線形力学の展望 I, II　共立出版、1991

[9] 柴谷篤弘：発生現象の細胞社会学　講談社サイエンテイフィク、1979

[10] 遺伝　１１月特集号動物の皮膚、1990

[11] A. M. Turing: Philos. Trans. Royal Soc. London 237 (1952) 37

[12] J. D. Murray: Scientific American 256 (1988)80

[13] V. Castets et al.: Phys. Rev. Lett 64 (1990)2953

[14] Q. Quyang and H. L. Swinney Nature 352 (1991) 610

[15] S. Kondo and R. Asai: Nature 376 31 (1995) 765

[16] video: simulation of dendritic solidification　小林亮 1995