SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 39

ヒルベルト空間における定常列

―― ア・エヌ・コルモゴロフ ――

河野敬雄
十時東生 編

1973

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ヒルベルト空間における定常列

—— ア・エヌ・コルモゴロフ ——

河野敬雄
十時東生 編

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

序　文

このセミナーノートは, А. Н. Колмогоров の論文

[1] Стационарные Последовательности в Гильбертовском Пространстве, Бюллетень Московского Государственного Университета, Математика, Том II, Выпуск 6 (1941), 1-40.

と

[2] Интерполирование и Екстраполирование Стационарных Случайных Последовательностей, Известия Академии Наук СССР, 5(1941), 3-14.

の翻訳及び附録からなる。[1] の掲載誌は Вестник Московского Университета, серия Физико-Математических и Естественных Наук (1946年創刊) の前身と思われるが確認できなかった. 論文[1]は, しばしば引用されるが掲載誌が日本にないため実物を見る機会がなかったが, この度, 数理解析研究所図書室を通じて, ソビエトより写真版を入手することができ, 内容の重要性と原論文に接する機会の少ないことを考え翻訳を思いたった。論文[2]は[1]の系として導かれる定理を述べたもので, あわせて翻訳することにした.

附録Iは論文[1]に使われている関数論, 特に H^p-空間についての理解を助けるためにまとめたものである. 附録IIは, コルモゴ

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ロフの論文以後の発展を総合報告的にまとめたものである．特に Interpolation，Markovian property と Regularity について整理した．ただし，連続径数の場合はもっと興味ある結果が得られているが今回は省略した．また，確率論との関係，特に正規定常過程との関連についても省略した．

論文[1]は十時，論文[2]と附録は河野が分担した．なお翻訳にあたって，京大教養部の宮本宗実氏に御教示いただいた．深く感謝します．

昭和48年3月19日

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ヒルベルト空間における定常列

ア・エヌ・コルモゴロフ

序

<u>定義 1.</u> 複素ヒルベルト空間[1)] H の要素の列 $\{x(t)\}$, t は $-\infty$ から $+\infty$ までのすべての整数値をとる，はもし内積

$$B_{xx}(k) = (x(t+k), x(t)) \qquad (0.1)$$

が t に無関係であれば，<u>定常</u>（*stationary*）<u>である</u>といわれる.

<u>定義 2.</u> 2つの定常列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ は，もし内積

$$B_{yx}(k) = (y(t+k), x(t)) \qquad (0.2)$$

が t に無関係であれば，<u>*stationarily connected*</u> であるといわれる.

$B_{xy}(k)$ と $B_{xx}(k)$ の定義から直ちに

$$B_{xy}(k) = \overline{B}_{yx}(-k), \qquad (0.3)$$

$$B_{xx}(k) = \overline{B}_{xx}(-k) \qquad (0.4)$$

であることがわかる。

この種の定常列や *stationarily connected* な列は，確率論や数

1) ヒルベルト空間の定義については M. Stone の本 (3) を参照せよ。

(訳注) 可分であることが仮定されている。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

理統計学において大きな意味を持っている．それらは H. Wold の本 (1) や H. Cramer の最近の論文に，確率論の言葉で詳細に研究されている．

われわれは H. Wold と H. Cramer の基本的な結果を，§3 と §7 にヒルベルト空間の幾何の用語で述べる．

この論文で調べられ解かれるすべての新しい問題も，同じく確率論と数理統計学に基づいて発生したものである．われわれが得る結果の，定常な確率変数列の extrapolation や interpolation の問題への応用は，私の論文 (7) で詳細に解明される．

つぎの定理は，stationary かつ stationarily connected な列とユニタリ作用素の間にある非常に簡明な関係を示す．

<u>定理 1.</u> 列

$$\{x_1(t)\},\ \{x_2(t)\},\ \cdots,\ \{x_n(t)\}$$

は stationary かつたがいに stationarily connected であるとし，$H_{x_1x_2\cdots x_n}$ をこれらの列のすべての項を含む空間 H の最小な線型閉部分空間とする．このとき，等式

$$Ux_\mu(t)=x_\mu(t+1),\quad \mu=1,2,\cdots,n,\ -\infty<t<\infty$$

は空間 $H_{x_1x_2\cdots x_n}$ をそれ自身の上へうつすユニタリ作用素

$$U=U_{x_1x_2\cdots x_n}$$

を一意に定める．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

この定理により，ユニタリ作用素のスペクトル理論における周知の結果から直ちに，*stationary* かつ *stationarily connected* な列の一連の基本的な性質を得ることができる．このような性質はすべて §§3-6 の定理で述べる．

もっと独特なそして本質的に新しい結果は §§8-10 で述べられる．§§1-2 は補助的な性格をもつ．

定理1は，定義1，2と§1で証明される Lemma 1 から直接に得られる．

§1. 2つの Lemma

空間 H の任意の部分集合 M 上で定義され，H の値をとる作用素

$$Tx = y$$

を考える．もし M の任意の x と y に対し

$$(x, y) = (Tx, Ty) \tag{1.1}$$

が成りたてば，作用素 T は <u>等距離作用素</u> (*isometry*) と名づけられる．H_M は空間 H の M を含む最小な線型閉部分空間とする．このときつぎの Lemma が成りたつ．

<u>Lemma 1.</u> 作用素 T は，等距離性を保って，空間 H_M 上に拡張される．この拡張は一意である．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

Lemmaの証明のために，Mで到るところ稠密な要素の列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots \tag{1.2}$$

を選ぶ。もし要素 z_n がそれに先行する z_k に一次従属であれば，z_n をこの列から除く。そのような z_n をすべて除いて得られる列

$$z_{n_1},\ z_{n_2},\ \cdots,\ z_{n_k},\ \cdots \tag{1.3}$$

に対して，

$$z = a_1 z_{n_1} + a_2 z_{n_2} + \cdots + a_p z_{n_p} \tag{1.4}$$

の形のすべての要素 z の集合Rは，列(1.2)のすべての要素を含み，H_M で到るところ稠密である．集合Rの要素は［列(1.3)が一次独立だから］(1.4)の形に一意に表わされるので，式

$$T^*z = a_1 Tz_{n_1} + a_2 Tz_{n_2} + \cdots + a_p Tz_{n_p} \tag{1.5}$$

はR上の作用素 T^* を一意に定める。このとき，Rの任意の z', z'' に対して

$$(z', z'') = (T^*z', T^*z'')$$

が成りたつ，すなわち，作用素 T^* はR上で等距離である．連続性によって，それは空間 H_M 上に等距離性を保って拡張される．

列(1.2)のすべての要素はRに入るので，(1.2)のすべての要素に対して

$$T^*z_n = Tz_n$$

が成りたつことが式(1.5)からわかる．さらに連続性によって，この式は集合M上で成りたつ．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

求める拡張の存在が示された.

作用素 T の任意の等距離的な拡張は, 式 (1.5) によって, 集合 R 上では T^* と一致する. 連続性によって, H_M 上でも一致する. したがって, 空間 H_M への T の等距離的な拡張は一意である. Lemma は証明された.

<u>*Lemma 2.*</u> 数列 $\{c_{mn}\}$ に対して, 空間 H に条件

$$(u_m, u_n) = c_{mn}\ ; \quad m, n = 1, 2, \cdots, \tag{1.6}$$

をみたす要素の列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

が存在するためには, 任意の $k, m_1, m_2, \cdots, m_k$ に対し行列 $\| c_{m_i m_j} \|$ が非負のエルミット行列であること, すなわち任意の複素数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ に対して

$$S = \sum_{i,j=1}^{k} c_{m_i m_j} \xi_i \overline{\xi_j} \geqq 0 \text{ [1)]} \tag{1.7}$$

が成りたつことが必要かつ十分である.

条件 (1.7) の必要性を示すために, 空間 H の要素

$$u = \xi_1 u_{m_1} + \xi_2 u_{m_2} + \cdots + \xi_k u_{m_k}$$

を考えよう。容易に計算されるように

---

1) ここおよび以後において, $a \geqq 0$ は a が実数で非負であることを示す.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\|u\|^2 = (u, u) = S \tag{1.8}$$

である。

つねに $\|u\|^2 \geq 0$ だから，(1.8) から (1.7) が従う．

条件 (1.7) の十分性の証明に移ろう．この条件に応じて，各 n に対して

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0$$

であることを仮定する．式 S_n を

$$S_n = \sum_{i=1}^{m} |\eta_i|^2$$

の形にうつすような変換

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(n)} \eta_j$$

をとる．Hから正規直交系

$$z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \cdots, z_m^{(n)}$$

をとり，

$$u_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(n)} z_j^{(n)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

とおく．このとき

$$(u_i^{(n)}, u_j^{(n)}) = c_{ij}$$

が容易に計算される．この構成をすべての正の整数 n に対して行い，列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

をつぎのように帰納的な手順で定義する：

1) $$u_1 = u_1^{(1)}$$

とおく；

2) すべての $m, n \leq N$ に対して要請 (1.6) をみたす $u_1, u_2, \cdots, u_N$ がすでに見出されたと仮定して，

$$T_N u_n^{(N+1)} = u_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

とおく．集合 $M_N = \{u_1^{(N+1)}, \cdots, u_N^{(N+1)}\}$ 上で作用素 T_N は等距離的である．

Lemma 1 により，それは等距離性を保って空間 H_{M_N} に拡張される．空間 H_{M_N} と $T_N H_{M_N}$ は有限次元だから，作用素 T_N は等距離性を保って全空間 H 上に拡張される［例えば M. Stone の本 (^{3}) の定理 2.49 を参照せよ］．この拡張をとり，

$$u_{N+1} = T_N u_{N+1}^{(N+1)}$$

とおけ．明らかに，要素 $u_1, u_2, \cdots, u_{N+1}$ はすべての $m, n \leq N+1$ に対して条件 (1.6) をみたす．

§2. 空間 H_x における作用素論

定理 1 に応じて，定常列 $\{x(t)\}$ を含む空間 H の最小の線型閉部分空間を H_x で表わし，等式

$$U_x x(t) = x(t+1) \tag{2.1}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

によって定まるユニタリ作用素 U_x を扱う.

$$U_x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE_x(\lambda) \tag{2.2}$$

を作用素 U_x のスペクトル表現とする.[1] $-\pi \leq \lambda \leq +\pi$ に対し

$$F_{xx}(\lambda) = |E_x(\lambda)x(0)|^2 \tag{2.3}$$

とおく.

M. Stone (3) の記号(6章§1)にしたがって, 区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ で定義され, $F_{xx}(\lambda)$ に関して可測でかつ積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \tag{2.4}$$

が有限な複素数値関数 $\varphi(\lambda)$ の全てのクラスを L_x^2 で表わす.

---

1) 線型作用素のスペクトル表現については M. Stone の本 (3) を参照せよ。以後つねに, ユニタリ作用素に対応する単位の分解 $E(\lambda)$ は $E(-\pi)=0$, $E(+\pi)=I$ なるもののみが使われることに注意せよ. これは以下で使われる M. Stone の本のすべての定理に適用される, そこでは自己共役作用素の

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$$

の形によるスペクトル表現に対応する単位の分解が非常に一般の場合に定式化されている.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

L_x^2 の 2つの関数 φ_1 と φ_2 は，もし $F_{xx}(\lambda)$ についてほとんどいたるところ

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$$

であれば同じものとされる．

クラス L_x^2 の各関数 φ に作用素

$$T(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\, dE_x(\lambda) \tag{2.5}$$

が対応する［M. Stone (3) の定理 6.1参照］，そしてその定義域 $\mathfrak{D}(\varphi)$ は，積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2\, d|E_x(\lambda) z|^2 \tag{2.6}$$

が有限であるような空間 H_x のすべての要素 z からなる．積分 (2.6) が有限であることにより，$x(0)$ はクラス L_x^2 の任意の関数 φ に対して $\mathfrak{D}(\varphi)$ に属することがわかる．したがって，クラス L_x^2 の各関数 φ は空間 H_x の定まった要素

$$z_\varphi = T(\varphi)x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\, dE_x(\lambda)\, x(0) \tag{2.7}$$

に対応する．

導入された記号を用いて，M. Stone (3) の定理 6.1 と 6.2 のほとんど直接の帰結である，つぎの 2つの Lemma を定式化することができる．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

Lemma 3. L_x^2 に属する φ に対して (2.5) の形に表わされるすべての作用素 T のクラスを $\mathfrak{F}_x$ とする。変換

$$\varphi \to T(\varphi)$$

はクラス L_x^2 を $\mathfrak{F}_x$ の上へ 1対1 にうつす。さらに

$$a\varphi \to aT(\varphi), \tag{3a}$$

$$\varphi_1+\varphi_2 \to T(\varphi_1)+T(\varphi_2); \tag{3b}$$

もし $\varphi_1\varphi_2$ が L_x^2 に属するならば,

$$\varphi_1\varphi_2 \to T(\varphi_1)T(\varphi_2)=T(\varphi_2)T(\varphi_1), \tag{3c}$$

$$e^{it\lambda} \to U_x^t, \tag{3d}$$

もし

$$\chi_\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \leq \lambda, \\ 0, & \mu > \lambda \end{cases}$$

ならば,

$$\chi_\lambda \to E_x(\lambda) \tag{3e}$$

である。

Lemma 4. 変換

$$\varphi \to z_\varphi$$

はクラス L_x^2 を全空間 H_x の上に 1対1 にうつす。さらに

$$a\varphi \to az_\varphi, \tag{4a}$$

$$\varphi_1+\varphi_2 \to z_{\varphi_1}+z_{\varphi_2}; \tag{4b}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

もし $\varphi_1\varphi_2$ が L_x^2 に属するならば，

$$\varphi_1\varphi_2 \longrightarrow T(\varphi_1)z_{\varphi_2} = T(\varphi_2)z_{\varphi_1}, \tag{4c}$$

$$e^{it\lambda}\varphi \longrightarrow U_x^t z_\varphi, \tag{4d}$$

$$\chi_\lambda\varphi \longrightarrow E_x(\lambda)z_\varphi, \tag{4e}$$

$$(z_{\varphi_1}, z_{\varphi_2}) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda), \tag{4f}$$

$$(E_x(\lambda)z_{\varphi_1}, z_{\varphi_2}) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_1(\lambda)\overline{\varphi_2}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda); \tag{4g}$$

が成りたつ．

変換 $\varphi \to T\varphi$ の性質 (3a), (3b) と (3c) は M. Stone (3) の定理 6.1 から出る．性質 (3d) と (3e) は式 (2.5) と式

$$U_x^t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,dE_x(\lambda), \tag{2.8}$$

$$E_x(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} dE_x(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\lambda(\mu)\,dE_x(\mu) \tag{2.9}$$

を比べて導かれる．変換 $\varphi \to T(\varphi)$ が 1 対 1 であることはつぎのように示される．$\varphi_1 \neq \varphi_2$ (L_x^2 での等号の定義の意味で) のとき，差

$$T(\varphi_1)x(0) - T(\varphi_2)x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)]\,dE_x(\lambda)\,x(0)$$

のノルムは

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)|^2\,d|E_x(\lambda)x(0)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)|^2\,dF_{xx}(\lambda) \neq 0$$

であり，したがって

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$T(\varphi_1)x(0) \neq T(\varphi_2)x(0)$$

である。

Lemma 4 の証明のために，つぎのことを注意しよう： L_x^2 に属する φ に対して (2.7) の形で表わされる H_x の要素すべての集合 $\mathfrak{M}$ は，M. Stone (3) の定理 6.2 により，空間 H_x の線型閉部分空間である；さらに

$$x(t) = U_x^t x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dE_x(\lambda) x(0) \tag{2.10}$$

であり，関数 $e^{it\lambda}$ は L_x^2 に属するので，$\mathfrak{M}$ はすべての $x(t)$ を含む，したがって

$$\mathfrak{M} = H_x$$

である．この注意によって，Lemma 4 で変換 $\varphi \to z_\varphi$ が 1対1 である部分とその性質 (4a), (4b) と (4f) は M. Stone (3) の定理 6.2 の直接の帰結として得られる。

変換 $\varphi \to z_\varphi$ の性質 (4c), (4d) と (4e) は，変換 $\varphi \to T(\varphi)$ の対応する性質 (3c), (3d) と (3e) から導かれる．最後に (4e) と (4f) から (4g) が導かれる：

$$(E_x(\lambda) z_{\varphi_1}, z_{\varphi_2}) = \int_{-\pi}^{\pi} [\chi_\lambda(\mu)\varphi_1(\mu)] \overline{\varphi_2}(\mu)\, dF_{xx}(\mu)$$

$$= \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_1(\mu)\, \overline{\varphi_2}(\mu)\, dF_{xx}(\mu).$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

このようにして Lemma 3 と Lemma 4 は証明された.

§3. スペクトルの基本的な性質

<u>定理 2.</u> 任意の定常列 $\{x(t)\}$ に対し, $B_{xx}(h)$ は

$$B_{xx}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_{xx}(\lambda), \qquad (3.1)$$

の形に表現される, ここに F_{xx} は区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上で定義された右連続で非減少な実関数であり,

$$F_{xx}(-\pi) = 0 \qquad (3.2)$$

をみたす。これらの条件をみたす関数 $F_{xx}(\lambda)$ は B_{xx} によって一意に定められる.

つぎのことを注意しよう: 関数 $F_{xx}(\lambda)$ は列 $\{x(t)\}$ の<u>スペクトル関数</u>と名づけられるが, あとでわかるように, それは §2 で式 (2.3) によって定義された関数と一致する.

<u>定理 3.</u> もし2つの定常列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ が *stationarily connected* であれば,

$$B_{xy}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_{xy}(\lambda) \qquad (3.3)$$

である, ここに $F_{xy}(\lambda)$ は区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上で定義された (一般には複素数値の) 右連続関数で, 有界変分であり

$$F_{xy}(-\pi) = 0 \qquad (3.4)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

をみたす。これらの条件をみたす関数 $F_{xy}(\lambda)$ は B_{xy} によって一意に定められる。

各定常列は自分自身と stationarily connected であるから、定理2は，関数 $F_{xx}(\lambda)$ が実数値で非減少であるという主張を除いて，定理3の特別な場合とみなされる。

定理3の証明のために，

$$n=2,\quad x_1=x,\quad x_2=y$$

として定理1によって存在が保証される作用素 U_{xy} のスペクトル表現

$$U_{xy}=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\,dE_{xy}(\lambda) \tag{3.5}$$

を考えよう。

$-\pi\leq\lambda\leq\pi$ に対して

$$(E_{xy}(\lambda)x(0),\,y(0))=F_{xy}(\lambda) \tag{3.6}$$

とおく。

周知のように［M. Stone (3), 177頁参照］，$F_{xy}(\lambda)$ は有界変分な右連続関数である。

$$E_{xy}(-\pi)=0 \tag{3.7}$$

から

$$F_{xy}(-\pi)=0$$

がわかる。最後に

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$B_{xy}(k)=(x(k),y(0))=(U^k x(0),y(0))=\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}dE(\lambda)x(0),y(0)\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}d(E(\lambda)x(0),y(0))=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}dF_{xy}(\lambda)$$

である.

このようにして，式 (3.6) で定義される関数 $F_{xy}(\lambda)$ は定理のすべての要請をみたす.

1つの列 $\{x(t)\}\equiv\{y(t)\}$ の場合には，関数

$$F_{xx}(\lambda)=(E_x(\lambda)x(0),x(0))=|E_x(\lambda)x(0)|^2 \qquad (3.8)$$

は実数値で非減少である［M. Stone (3), 189頁参照］. これは定理2における対応する主張を示している.

有界変分の関数に対する Fourier 級数の初等的な性質により，

$$F_{xy}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}W_{xy}(\lambda+0)+C \qquad (3.9)$$

であることがわかる，ここに

$$W_{xy}(\lambda)=B_{xy}(0)\lambda-\sum_{k\neq 0}\frac{B_{xy}(k)}{ik}e^{-ik\lambda} \qquad (3.10)$$

であり，定数 C は条件

$$F_{xy}(-\pi)=0 \qquad (3.11)$$

から計算される. 式 (3.9) と (3.10) は関数 $F_{xy}(\lambda)$ が B_{xy} によって一意に定まることを示している. このようにして，定理2と3は完全に証明された.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(3.6) から

$$F_{yx}(\lambda) = \bar{F}_{xy}(\lambda) \tag{3.12}$$

であることが直ちにわかることを注意しよう。

<u>定理4</u> (H. Cramer). もし列

$$\{x_1(t)\},\ \{x_2(t)\},\ \cdots,\ \{x_n(t)\}$$

が定常でありかつ *stationarily connected* であるならば，任意の $-\pi \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$ に対して，増分

$$\Delta F_{x_\mu x_\nu} = F_{x_\mu x_\nu}(\beta) - F_{x_\mu x_\nu}(\alpha) \tag{3.13}$$

は非負のエルミット行列をなす，すなわち，任意の複素数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ に対して

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Delta F_{x_\mu x_\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0 \tag{3.14}$$

が成りたつ．

逆に，もし区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上で定義された右連続関数

$$F_{\mu\nu}(\lambda), \quad \mu, \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

が条件

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Delta F_{\mu\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0, \tag{3.15}$$

$$F_{\mu\nu}(-\pi) = 0 \tag{3.16}$$

をみたすならば，定常かつ *stationarily connected* なる列の系

$$\{x_1(t)\},\ \{x_2(t)\},\ \cdots,\ \{x_n(t)\}$$

で

$$F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) = F_{\mu\nu}(\lambda) \tag{3.17}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

をみたすものが H に存在する．

定理の最初の部分の証明のために，定理 1 の作用素

$$U = U_{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

のスペクトル表現

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda)$$

をとり，

$$z = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu x_\mu(0)$$

とおく．そして区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上でつぎのようにおく

$$\varphi(\lambda) = |E(\lambda)z|^2 = (E(\lambda)z, z) = \left(E(\lambda)\sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu x_\mu(0), \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu(0)\right)$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\xi_\mu E(\lambda) x_\mu(0), \xi_\nu x_\nu(0)) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu (E(\lambda) x_\mu(0), x_\nu(0))$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) \xi_\mu \bar{\xi}_\nu .$$

関数 $\varphi(\lambda)$ は実数値で単調非減少だから [M. Stone (3), 189頁参照]，$\alpha < \beta$ のとき

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \Delta\varphi = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Delta F_{x_\mu x_\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0$$

である．これが証明すべきことであった．

定理の第二の部分の証明にうつり，

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$B_{\mu\nu}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF_{\mu\nu}(\lambda)$$

とおく. Lemma 2 によれば, すべての整数 t とすべての $\mu = 1, 2, \cdots, n$, に対して, 空間 H の要素 $x_\mu(t)$ が存在して

$$(x_\mu(t'), x_\nu(t'')) = B_{\mu\nu}(t' - t'')$$

であるためには,

$$B = \sum_{p,q=1}^{r} B_{\mu_p \mu_q}(t_p - t_q) \xi_p \bar{\xi}_q \geq 0$$

がすべての r, μ_p, t_p, ξ_p に対して成りたてば十分である。この要請はつねにみたされる, 何故なら

$$\xi_p(\lambda) = e^{it_p\lambda} \xi_p, \quad \zeta_\mu(\lambda) = \Sigma^{(\mu)} \xi_p(\lambda),$$

ここに $\Sigma^{(\mu)}$ は $\mu_p = \mu$ なるすべての p についての和, とおけば, 不等式 (3.15) によって

$$B = \sum_{p,q=1}^{r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_p - t_q)} dF_{\mu_p \mu_q}(\lambda) \xi_p \bar{\xi}_q$$

$$= \sum_{p,q=1}^{r} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_p(\lambda) \bar{\xi}_q(\lambda) dF_{\mu_p \mu_q}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \zeta_\mu(\lambda) \bar{\zeta}_\nu(\lambda) dF_{\mu\nu}(\lambda)$$

$$\geq 0$$

である.

こうして空間 H の要素 $x_\mu(t)$ が存在して

$$B_{x_\mu x_\nu}(k) = (x_\mu(t+k), x_\nu(t)) = B_{\mu\nu}(k)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が成りたつ。したがって列

$$\{x_1(t)\},\ \{x_2(t)\},\ \cdots,\ \{x_n(t)\}$$

は定常かつ stationarily connected である。このとき

$$F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) = F_{\mu\nu}(\lambda)$$

であることが容易にわかる。定理4は完全に証明された。

$n=1$ のとき定理4の第二の部分から次の定理が導かれる:

<u>定理5.</u> 区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上で定義された任意の実数値，右連続，非減少関数 $F(\lambda)$ で，条件 $F(-\pi)=0$ をみたすものに対し，定常列 $\{x(t)\}$ で

$$F_{xx}(\lambda) = F(\lambda)$$

をみたすものが存在する。

$n=2$ のときは，条件 (3.15) は条件

$$\Delta F_{x_1x_1} \geqq 0,\ \Delta F_{x_2x_2} \geqq 0,\ |\Delta F_{x_1x_2}|^2 \leqq \Delta F_{x_1x_1}\cdot\Delta F_{x_2x_2}$$

に同等である [H. Cramer (2), 227頁参照]。この場合，定理4によって次の定理が得られる:

<u>定理6.</u> もし列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ が定常かつ stationarily connected であれば，任意の $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$ に対して

$$|\Delta F_{xy}|^2 \leq \Delta F_{xx}\cdot\Delta F_{yy} \tag{3.18}$$

が成りたつ。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

逆に，区間 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上で定義された関数 $F_{11}(\lambda)$，$F_{22}(\lambda)$，$F_{12}(\lambda)$ が，もし右連続で条件

$$\left.\begin{array}{l} \Delta F_{11} \geq 0, \quad \Delta F_{22} \geq 0, \quad |\Delta F_{12}|^2 \leq \Delta F_{11} \cdot \Delta F_{22} \\ F_{11}(-\pi) = F_{22}(-\pi) = F_{12}(-\pi) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

をみたせば，定常かつ *stationarily connected* な列 $\{x(t)\}$，$\{y(t)\}$ が存在し，$F_{xx}(\lambda) = F_{11}(\lambda)$，$F_{yy}(\lambda) = F_{22}(\lambda)$，$F_{xy}(\lambda) = F_{12}(\lambda)$ をみたす．

定理 6 のつぎの拡張があとで必要になる：

<u>定理 7.</u> もし関数 $F_{11}(\lambda)$，$F_{22}(\lambda)$，$F_{12}(\lambda)$ が定理 6 の第二の部分の条件をすべてみたし，定常列 $\{x(t)\}$ が

$$F_{xx}(\lambda) = F_{11}(\lambda)$$

をみたし，そして空間 H における空間 H_x の直交補空間 $H \ominus H_x$ が無限次元であれば，定常かつ $\{x(t)\}$ と *stationarily connected* な列 $\{y(t)\}$ が H に存在し

$$F_{yy}(\lambda) = F_{22}(\lambda), \quad F_{xy}(\lambda) = F_{12}(\lambda)$$

をみたす．

定理 7 を証明するためにつぎのことを注意する，定理 6 によれば，関数 $F_{11}(\lambda)$，$F_{22}(\lambda)$，$F_{12}(\lambda)$ に関する条件によって，定常かつ *stationarily connected* な列 $\{x^*(t)\}$，$\{y^*(t)\}$ が存在して

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$F_{x^*x^*}(\lambda) = F_{11}(\lambda), \quad F_{y^*y^*}(\lambda) = F_{22}(\lambda), \quad F_{x^*y^*}(\lambda) = F_{12}(\lambda)$$

をみたす.

すべての整数 t に対して

$$Tx^*(t) = x(t)$$

とおく. 作用素 T は集合 $\{x^*(t)\}$ 上で等距離的であることが容易にわかる. Lemma 1 により, 作用素 T は等距離性を保って, 空間 H_{x^*} 上に拡張される. このとき明らかに

$$TH_{x^*} = H_x$$

である.

直交補空間 $H \ominus H_x$ は無限次元だから, 作用素 T は等距離性を保って空間 $H_{x^*y^*}$ 上に拡張されうる [M. Stone (3), 定理 2.49 参照]. このような拡張を選び

$$Ty^*(t) = y(t)$$

とおく.

容易にわかるように, 列 $\{y(t)\}$ は定理 7 に要求されているすべての性質をもつ.

§4. Subordinate する列

<u>定義 3.</u> 定常列 $\{y(t)\}$ が定常列 $\{x(t)\}$ に <u>subordinate する</u>というのは, 列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ が stationarily connected

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

でありかつ列 $\{y(t)\}$ のすべての要素が空間 H_x に属することをいう。

明らかに，もし列 $\{y(t)\}$ が列 $\{x(t)\}$ に subordinate するならば，

$$H_{xy} = H_x \tag{4.1}$$

$$U_{xy} = U_x \tag{4.2}$$

である．§2 で導入された考え方を用いて，次の定理を証明することができる：

<u>定理 8.</u> $\{x(t)\}$ に subordinate する各列 $\{y(t)\}$ に対して，クラス L_x^2 の唯一つの関数 $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ が対応して

$$F_{yy}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \tag{4.3}$$

$$F_{yx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_y^{(x)}(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda) \tag{4.4}$$

をみたす．対応

$$\{y(t)\} \longrightarrow \varphi_y^{(x)}(\lambda)$$

は，$\{x(t)\}$ に subordinate するすべての列 $\{y(t)\}$ のクラス Y_x を関数 $\varphi(\lambda)$ のクラス L_x^2 の上に 1 対 1 にうつす。さらに Y_x に属する 2 つの列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ に対して

$$F_{y_1 y_2}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_{y_1}^{(x)}(\lambda)\, \overline{\varphi_{y_2}^{(x)}}(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda) \tag{4.5}$$

が成りたつ．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理8における関数 $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ の一意性の主張は，§2で与えられたクラス L_x^2 の関数 $\varphi(\lambda)$ に対する同一視の定義に応じた意味にとられる．この意味で $\{y(t)\}$ によって $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ が一意に定まることは，(4.4) によって

$$\varphi_y^{(x)}(\lambda) = \frac{dF_{yx}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} \tag{4.6}$$

であることから直ちにわかる．クラス Y_x の任意の列 $\{y(t)\}$ に対する関数 $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ の存在は§2の Lemma 4 に基づいて証明される．もし $\{y(t)\}$ が Y_x に入れば，$y(0)$ は H_x に属し，そして Lemma 4 によってクラス L_x^2 の関数 $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ があって

$$y(0) = z_{\varphi_y^{(x)}} \tag{4.7}$$

である．

式 (3.6) と Lemma 4 の主張 (4g) によって，Y_x からの任意の列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ に対して

$$\begin{aligned} F_{y_1y_2}(\lambda) &= (E_{y_1y_2}(\lambda)y_1(0), y_2(0)) = (E_x(\lambda)y_1(0), y_2(0)) \\ &= \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_{y_1}^{(x)}(\lambda)\overline{\varphi_{y_2}^{(x)}(\lambda)}\,dF_{xx}(\lambda) \end{aligned}$$

が成りたつ，これは式(4.5)を示す．$y_1=y$, $y_2=x$ のとき (4.4) が得られ，$y_1=y_2=y$ のとき (4.3) が得られる．

Y_x と L_x^2 の間の対応が1対1であることも Lemma 4 から導かれる．

つぎの定理は定理8の本質的な補足である．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理9. もし列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ が定常かつ *stationarily connected* であるならば，列 $\{y(t)\}$ が列 $\{x(t)\}$ に *subordinate* するための必要十分条件は，L_x^2 の関数 $\varphi(\lambda)$ が存在して

$$F_{yy}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \qquad (4.8)$$

$$F_{yx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda) \qquad (4.9)$$

をみたすことである.

条件の必要性は定理8から出る。十分性を証明しよう．もし等式(4.8)と(4.9)をみたす L_x^2 の関数 $\varphi(\lambda)$ が存在すれば，定理8によって，列 $\{x(t)\}$ に *subordinate* する列 $\{y^*(t)\}$ が存在して

$$\varphi_{y^*}^{(x)}(\lambda) = \varphi(\lambda)$$

をみたす，したがって

$$F_{y^*y^*}(\lambda) = F_{yy}(\lambda), \quad F_{y^*x}(\lambda) = F_{yx}(\lambda)$$

である。

Lemma 1 によれば，H_{xy^*} 上に *isometry* T が定義できて，任意の整数 t に対して

$$Tx(t) = x(t), \quad Ty^*(t) = y(t).$$

明らかに

$$T(H_{xy^*}) = H_{xy}, \quad T(H_x) = H_x \qquad (4.10)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

である. $\{y^*(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate しているから

$$H_{xy^*} = H_x \tag{4.11}$$

である.

(4.10) と (4.11) から

$$H_{xy} = H_x$$

が得られるが, これは $\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に subordinate することを示している[1].

<u>定義4.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ と $\{y(t)\}$ において, もしたがいに他に subordinate するならば, すなわちそれらが stationarily connected であってかつ

$$H_x = H_y$$

であれば, それらは<u>同値である</u>といわれる.

<u>定理10.</u> $\{x(t)\}$ に subordinate する列 $\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ と同値であるための必要十分条件は, 関数 $\varphi_y^{(x)}(\lambda)$ が $F_{xx}(\lambda)$ に関してほとんどいたるところ 0 でないことである. もしこの条件がみたされるならば, $F_{xx}(\lambda)$ および $F_{yy}(\lambda)$ に関してほとんどいたるところ

$$\varphi_x^{(y)}(\lambda) = \frac{1}{\varphi_y^{(x)}(\lambda)} \tag{4.12}$$

---

1) この結論が得られた後, 実は列 $\{y^*(t)\}$ は $\{y(t)\}$ に一致することが明らかになる.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が成りたつ。

1°. 条件の必要性を示そう。$\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に subordinate し，$\{x(t)\}$ が $\{y(t)\}$ に subordinate すると仮定する。そのとき式 (4.3) と添字をかえて得られる式

$$F_{xx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi_x^{(y)}(\lambda)|^2 dF_{yy}(\lambda) \tag{4.13}$$

から，関数 $F_{xx}(\lambda)$ と $F_{yy}(\lambda)$ はたがいに絶対連続であることがわかる。したがって《F_{xx} に関してほとんどいたるところ》と《F_{yy} に関してほとんどいたるところ》というのは一致する。(4.3) と (4.13) のゆえに

$$F_{xx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi_x^{(y)}(\lambda)|^2 dF_{yy}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi_x^{(y)}(\lambda)|^2 |\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda)$$

であり，したがって F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$|\varphi_x^{(y)}(\lambda)|^2 |\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2 = 1 \tag{4.14}$$

である。

式 (4.14) は，F_{xx} に関してほとんどいたるところ $\varphi_y^{(x)}(\lambda) \neq 0$ であることを示している，これが示すべきことであった。

2°. 条件の十分性を証明しよう。$\{y(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に subordinate し，かつ F_{xx} に関してほとんどいたるところ $\varphi_y^{(x)}(\lambda) \neq 0$ であることを仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

式(4.3)によって関数 $F_{yy}(\lambda)$ は，$F_{xx}(\lambda)$ に関して絶対連続だから，$F_{yy}(\lambda)$ に関してもほとんどいたるところ $\varphi_y^{(x)}(\lambda)\neq 0$ である．したがって

$$\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{dF_{yy}(\lambda)}{|\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2}=\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{|\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda)}{|\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2}=\int_{-\pi}^{\lambda}dF_{xx}(\lambda)=F_{xx}(\lambda) \quad (4.15)$$

$$\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{dF_{yy}(\lambda)}{\varphi_y^{(x)}(\lambda)}=\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{|\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda)}{\varphi_y^{(x)}(\lambda)}=\int_{-\pi}^{\lambda}\overline{\varphi_y^{(x)}}(\lambda)dF_{xx}(\lambda)$$

$$=\overline{\int_{-\pi}^{\lambda}\varphi_y^{(x)}(\lambda)dF_{xx}(\lambda)}=\overline{F_{yx}(\lambda)}=F_{xy}(\lambda) \quad (4.16)$$

が成りたつ．

式(4.15)と(4.16)は，関数

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{\varphi_y^{(x)}(\lambda)} \quad (4.17)$$

が要請

$$F_{xx}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi(\lambda)|^2 dF_{yy}(\lambda) \quad (4.18)$$

$$F_{xy}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}\varphi(\lambda)\,dF_{yy}(\lambda) \quad (4.19)$$

をみたすことを示している．

したがって定理9によって，列 $\{x(t)\}$ は $\{y(t)\}$ に subordinate する．これが示すべきことであった．

3°. 定理8によって，式(4.15)と(4.16)から

$$\varphi_x^{(y)}(\lambda)=\varphi(\lambda)=\frac{1}{\varphi_y^{(x)}(\lambda)}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が得られる。

§5. 定常列の直交和への分解

<u>定義5.</u> 2つの列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ は，もしすべての整数 k と t に対して

$$(y_1(t+k),\ y_2(t))=0 \tag{5.1}$$

であれば，たがいに<u>直交している</u>といわれる。

明らかに，2つの定常かつ *stationarily connected* な列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ がたがいに直交するための必要十分条件は

$$B_{y_1y_2}(k)\equiv 0 \tag{5.2}$$

あるいはそれと同等な

$$F_{y_1y_2}(\lambda)\equiv 0 \tag{5.3}$$

である。

<u>定理11.</u> もし2つの列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ が定常で，かつ，たがいに直交であれば，

a) 列

$$\{x(t)\}=\{y_1(t)-y_2(t)\}$$

は定常である；

b) 列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ はそれら自身の間で *stationarily connected* であるばかりでなく，列 $\{x(t)\}$ ともそうである，そしてつぎ

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

の諸関係が成りたつ：

$$(c_1)\quad B_{xx}(k)=B_{y_1y_1}(k)+B_{y_2y_2}(k),$$

$$(c_2)\quad B_{y_1x}(k)=B_{y_1y_1}(k),$$

$$(c_3)\quad B_{y_2x}(k)=B_{y_2y_2}(k);$$

$$(d_1)\quad F_{xx}(\lambda)=F_{y_1y_1}(\lambda)+F_{y_2y_2}(\lambda),$$

$$(d_2)\quad F_{y_1x}(\lambda)=F_{y_1y_1}(\lambda),$$

$$(d_3)\quad F_{y_2x}(\lambda)=F_{y_2y_2}(\lambda).$$

定理11は式(0.2), (3.9), (3.10), (3.11)にもとづく簡単な計算で証明される.

定理11の条件の下で，式(d_1)と増分ΔF_{xx}, $\Delta F_{y_1y_1}$, $\Delta F_{y_2y_2}$の非負性（$\Delta\lambda$が非負のとき）によって，

$$\left|\frac{\Delta F_{y_1y_1}}{\Delta F_{xx}}\right|\leq 1,\quad \left|\frac{\Delta F_{y_2y_2}}{\Delta F_{xx}}\right|\leq 1 \tag{5.4}$$

である。したがって関数

$$\psi^{(x)}_{y_1}(\lambda)=\frac{dF_{y_1y_1}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)},\quad \psi^{(x)}_{y_2}(\lambda)=\frac{dF_{y_2y_2}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} \tag{5.5}$$

は有界であって，等式

$$F_{y_1y_1}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}\psi^{(x)}_{y_1}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda),$$

$$F_{y_2y_2}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}\psi^{(x)}_{y_2}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda) \tag{5.6}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

によって（L_x^2 の意味で）一意に定まる.

<u>定理12.</u> 定理11の条件の下で，列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ は共に $\{x(t)\}$ に *subordinate* するか，あるいは共に *subordinate* しないかである. *subordinate* するための必要十分条件は，F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$\psi_{y_1}^{(x)}(\lambda)\,\psi_{y_2}^{(x)}(\lambda)=0 \tag{5.7}$$

が成りたつことである.

<u>証明</u>. 1° もし $\{y_1(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に *subordinate* すれば，関係

$$y_2(t)=x(t)-y_1(t)$$

によって $\{y_2(t)\}$ も $\{x(t)\}$ に *subordinate* する. 全く同様に，もし $\{y_2(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に *subordinate* すれば，$\{y_1(t)\}$ も $\{x(t)\}$ に *subordinate* する.

2° もし列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ が共に $\{x(t)\}$ に *subordinate* すれば，(5.6)を(4.3)と比較することによって，F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$\psi_{y_1}^{(x)}=|\varphi_{y_1}^{(x)}|^2,\quad \psi_{y_2}^{(x)}=|\varphi_{y_2}^{(x)}|^2 \tag{5.8}$$

であることがわかる. さらに等式 (d_2) と (d_3) を考慮すれば，(5.6)と(4.4)を比較することによって，F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$\psi_{y_1}^{(x)}=\varphi_{y_1}^{(x)},\quad \psi_{y_2}^{(x)}=\varphi_{y_2}^{(x)} \tag{5.9}$$

であることがわかる.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

等式 (5.8) と (5.9) を比較して，関数 $\psi_{y_1}^{(x)}$ と $\psi_{y_2}^{(x)}$ は F_{xx} に関してほとんどいたるところ 0 または 1 に等しいことがわかる．さらに，F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$\psi_{y_1}^{(x)}+\psi_{y_2}^{(x)}=\frac{dF_{y_1y_1}}{dF_{xx}}+\frac{dF_{y_2y_2}}{dF_{xx}}=\frac{dF_{xx}}{dF_{xx}}=1 \qquad (5.10)$$

が成りたつので，条件 (5.7) がみたされることがわかる．

3° 条件 (5.7) がみたされているとしよう．このとき (5.10) のゆえに，関数 $\psi_{y_1}^{(x)}$ と $\psi_{y_2}^{(x)}$ は F_{xx} に関してほとんどいたるところ 0 または 1 に等しい．

したがって，F_{xx} に関してほとんどいたるところ等式

$$\psi_{y_1}^{(x)}=|\psi_{y_1}^{(x)}|^2, \quad \psi_{y_2}^{(x)}=|\psi_{y_2}^{(x)}|^2 \qquad (5.11)$$

が成りたつ．

(5.11), (5.6), (d_2), (d_3) によって，つぎの関係がわかる，

$$\left.\begin{aligned}
F_{y_1y_1}(\lambda)&=\int_{-\pi}^{\lambda}|\psi_{y_1}^{(x)}(\lambda)|^2\,dF_{xx}(\lambda),\\
F_{y_1x}(\lambda)&=\int_{-\pi}^{\lambda}\psi_{y_1}^{(x)}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda),\\
F_{y_2y_2}(\lambda)&=\int_{-\pi}^{\lambda}|\psi_{y_2}^{(x)}(\lambda)|^2\,dF_{xx}(\lambda),\\
F_{y_2x}(\lambda)&=\int_{-\pi}^{\lambda}\psi_{y_2}^{(x)}(\lambda)\,dF_{xx}(\lambda).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理9によって，等式(5.12)をみたす関数 $\psi_{y_1}^{(x)}$ と $\psi_{y_2}^{(x)}$ の存在から，列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に subordinate することがわかる．

定理13. 定常列 $\{x(t)\}$ に対し，空間 H における空間 H_x の直交補空間 $H \ominus H_x$ は無限次元であるとする．このとき，任意の実数値，非減少，右連続な関数 $F_1(\lambda)$ と $F_2(\lambda)$ で $F_1(-\pi)=F_2(-\pi)=0$ なるものの和による $F_{xx}(\lambda)$ の表現

$$F_{xx}(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) \tag{5.13}$$

に，列 $\{x(t)\}$ の

$$x(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{5.14}$$

の形での表現が1つ対応する，ここに列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ はたがいに直交し，スペクトル関数

$$F_{y_1y_1}(\lambda) = F_1(\lambda), \quad F_{y_2y_2}(\lambda) = F_2(\lambda) \tag{5.15}$$

を持つ．

証明のために

$$F_{11}(\lambda) = F_{xx}(\lambda), \ F_{22}(\lambda) = F_1(\lambda), \ F_{12}(\lambda) = F_1(\lambda)$$

とおく．

関数 $F_{11}(\lambda)$, $F_{22}(\lambda)$, $F_{12}(\lambda)$ は定理6の才二の部分の条件をみたす．したがって定理7によって，空間Hに定常かつ $\{x(t)\}$ と

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

stationarily connected なる列 $\{y_1(t)\}$ が存在して

$$F_{y_1y_1}(\lambda)=F_{22}(\lambda)=F_1(\lambda),\quad F_{xy_1}(\lambda)=F_{12}(\lambda)=F_1(\lambda)$$

をみたす.

$$y_2(t)=x(t)-y_1(t)$$

とおけば, 簡単な計算で, 列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ が たがいに直交し, 等式 (5.15) をみたすことが示される.

列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に *subordinate* する, すなわち空間 H_x に属する, ためには表現 (5.13) における関数 $F_1(\lambda)$ と $F_2(\lambda)$ にどのような条件を課すべきかが, 定理12 においてすでに得られている. この条件をつけ加えるときに, 補空間 $H\ominus H_x$ が無限次元であるという要請は必要でなくなり[1), 定理13 の結論は, 表現 (5.14) が表現 (5.13) によって一意に定まる[2) というように強められる. そしてつぎの定理が得ら

---

1) 実際, 空間 H の拡張 H^* で $H^*\ominus H$ が無限次元であるようなものをとれし. 定理13 によって, H^* に求める列 $\{y_1(t)\}$, $\{y_2(t)\}$ が存在する, そして定理12 の条件をつけ加えるとき列 $\{y_1(t)\}$, $\{y_2(t)\}$ は H_x に属する.

2) これはつぎのことからわかる, すなわち定理 8 によって関数

$$\varphi^{(x)}_{y_1}=\frac{dF_1}{dF_{xx}}\quad と\quad \varphi^{(x)}_{y_2}=\frac{dF_2}{dF_{xx}}$$ は $\{x(t)\}$ に *subordinate* する列

$\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ を一意に定める.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

れる：

定理14. 定常列 $\{x(t)\}$ は任意とし，そのスペクトル関数 $F_{xx}(\lambda)$ の

$$F_{xx}(\lambda)=F_1(\lambda)+F_2(\lambda)$$

の形による任意の表現，ただし $F_1(\lambda)$ と $F_2(\lambda)$ は実数値，非減少，右連続な λ の関数で $F_1(-\pi)=F_2(-\pi)=0$ であり F_{xx} に関してほとんどいたるところ

$$\frac{dF_1}{dF_{xx}}\cdot\frac{dF_2}{dF_{xx}}=0 \tag{5.16}$$

をみたす，このような任意の表現に対し，列 $\{x(t)\}$ の

$$x(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

の形による表現が一意に対応する，ここに列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ はたがいに直交し

$$F_{y_1y_2}(\lambda)=F_1(\lambda),\quad F_{y_2y_2}(\lambda)=F_2(\lambda)$$

をみたす。このとき列 $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する．

§6. 移動和

定義6. 列 $\{x(t)\}$ が定常列 $\{u(t)\}$ から移動和によって得られるというのは，係数 a_n がみいだせて

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n u(t-n) \tag{6.1}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が成りたつことである，ただし右辺の級数はノルムで収束する．

定常列 $\{u(t)\}$ から移動和によって得られる列 $\{x(t)\}$ は，明らかにつねに定常であり $\{u(t)\}$ に subordinate する。この節では逆の主張も正しいような特別な場合を調べる．

<u>定義7.</u> 空間 H の要素の列 $\{u(t)\}$ が，もし定常で条件

$$B_{uu}(0)=1, \quad B_{uu}(h)=0 \quad h\neq 0 \text{ のとき} \tag{6.2}$$

をみたせば，<u>基本的</u>であるといわれる．

式 (3.9) と (3.10) によって，基本的な列 $\{u(t)\}$ に対し

$$F_{uu}(\lambda)=\frac{\lambda+\pi}{2\pi} \tag{6.3}$$

であることが容易に計算される．逆に，(6.3) の形のスペクトル関数をもつ定常列 $\{u(t)\}$ は基本的である。

基本的な列 $\{u(t)\}$ の要素は空間 H_u の完全正規直交系をなす．したがって空間 H_u の各要素 z はつぎの形に一意に表現される．

$$z=\sum_{t=-\infty}^{+\infty} c_t u(t). \tag{6.4}$$

ここに

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} c_t^2=\|z\|^2<+\infty \tag{6.5}$$

である．式 (6.4) における係数 c_t は等式

$$c_t=(z, u(t)) \tag{6.6}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

によって定められる.

定理15. 定常列 $\{x(t)\}$ が基本的な列 $\{u(t)\}$ から移動和によって得られるための必要十分条件は列 $\{x(t)\}$ が $\{u(t)\}$ に subordinate することである。もしこの条件がみたされるならば, (6.1) の形による $\{x(t)\}$ の一意的な表現が式

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{xu}(n)u(t-n) \tag{6.7}$$

で与えられる.

定理の条件の必要性はすでに上に述べられた. もしこの条件がみたされるならば, 列 $\{x(t)\}$ の各要素 $x(t)$ は H_u に属し, 式 (6.4) と (6.6) により

$$x(t)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(x(t),\ u(s))u(s)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{xu}(t-s)u(s)$$

の形に表現される, $t-s=n$ とおけば (6.7) の形である.

任意の要素の (6.4) の形による表現の一意性によって, 列 $\{x(t)\}$ の (6.1) の形での表現が (6.7) に一致することがわかる.

(6.7) を (6.4) と (6.5) に比べることによって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|B_{xu}(n)|^2=\|x(t)\|^2=B_{xx}(0) \tag{6.8}$$

が得られることを注意しよう.

(4.3), (4.4) と (6.3) から

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$F_{xx}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi_x^{(u)}(\lambda)|^2 d\lambda \qquad (6.9)$$

$$F_{xu}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda}\varphi_x^{(u)}(\lambda)\, d\lambda \qquad (6.10)$$

が得られる。式 (6.9) は $\varphi_x^{(u)}(\lambda)$ が2乗可積分関数であることを示している。(3.3) と (6.10) から

$$B_{xu}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\varphi_x^{(u)}(\lambda)d\lambda \qquad (6.11)$$

が得られる。このようにして，$B_{xu}(n)$ は関数 $\varphi_x^{(u)}(\lambda)$ の Fourier 係数である，すなわち

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_{xu}(n)e^{-in\lambda}. \qquad (6.12)$$

上に得られた式についてつぎのことを注意しよう，すなわち (6.3) のゆえに《F_{uu} に関してほとんどいたるところ》というのは単に《Lebesgue 測度 0 の集合を除いて》を意味し，そしてクラス L_u^2 は本来の Lebesgue の意味で 2乗可積分な関数のクラス L^2 に一致する．

<u>定理16.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が基本的な列から移動和によって得られるためには，スペクトル関数 $F_{xx}(\lambda)$ が絶対連続であることが必要である．もし直交補空間 $H\ominus H_x$ が無限次元であれば，この条件は十分でもある．

条件の必要性は式 (6.9) から明らかである．十分性を証明するために，$-\pi\leq\lambda\leq\pi$ 上 ほとんどいたるところ

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$|\gamma(\lambda)|^2 = 2\pi \frac{dF_{xx}}{d\lambda} \tag{6.13}$$

であるような L^2 の任意の関数 $\gamma(\lambda)$ をとり，関数 $F_{11}(\lambda)$, $F_{22}(\lambda)$, $F_{12}(\lambda)$ を式

$$F_{11}(\lambda) = F_{xx}(\lambda),\ F_{22}(\lambda) = \frac{\lambda+\pi}{2\pi},\ F_{12}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda} \gamma(\lambda)d\lambda$$

で定めよう.

これらの関数が定理6の後半の条件をみたすことが容易にわかる. $H \ominus H_x$ が無限次元だから，定理7により，定常かつ $\{x(t)\}$ と stationarily connected な列 $\{u(t)\}$ が存在して

$$F_{uu}(\lambda) = F_{22}(\lambda) = \frac{\lambda+\pi}{2\pi} \tag{6.14}$$

$$F_{xu}(\lambda) = F_{12}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda} \gamma(\lambda)d\lambda \tag{6.15}$$

をみたす.

式 (6.14) は $\{u(t)\}$ が基本的な列であることを示す. $F_{xx}(\lambda)$ の絶対連続性と式 (6.13) から

$$F_{xx}(\lambda) = F_{11}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda} |\gamma(\lambda)|^2 d\lambda \tag{6.16}$$

を得る。

定理9のゆえに，(6.15) と (6.16) から列 $\{x(t)\}$ が列 $\{u(t)\}$ に subordinate することがわかる. そして定理15によって，

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$\{x(t)\}$ は $\{u(t)\}$ から移動和によって得られることがわかる。

<u>定理17.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が，$\{x(t)\}$ に subordinate する基本的な列から移動和によって得られるためには，関数 $F_{xx}(\lambda)$ が絶対連続で関数

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda} \tag{6.17}$$

が $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上ほとんどいたるところ正であることが必要かつ十分である．

もしこの2条件がみたされるならば，

A) それから $\{x(t)\}$ が移動和によって得られる基本的な列はすべて $\{x(t)\}$ に subordinate する，

B) 列 $\{x(t)\}$ はそれに subordinate する任意の基本的な列から移動和によって得られる，

C) $\{x(t)\}$ に subordinate する列 $\{u(t)\}$ が基本的であるためには，$-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上ほとんどいたるところ

$$|\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 = \frac{1}{2\pi f_{xx}(\lambda)} \tag{6.18}$$

であることが必要かつ十分である．

式(6.18)についてつぎのことを注意しよう，すなわち $F_{xx}(\lambda)$ の絶対連続性と $f_{xx}(\lambda)$ がほとんどいたるところ正であるという条件の下で，F_{xx} に関して測度0の集合のクラスは Lebesgue 測度0の集合のクラスと一致する．したがって，クラス L_x^2 の関数，特に関数 $\varphi_u^{(x)}$，は普通の Lebesgue 測度0の集合までの正確さで定められる．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理17の証明.

1° 絶対連続性の条件の必要性はすでに定理16で得られている。関数 f_{xx} がほとんどいたるところ正であることの必要性を示そう。もし基本的な列 $\{u(t)\}$ が $\{x(t)\}$ に subordinate すれば，定理9によって

$$\frac{\lambda+\pi}{2\pi} = F_{uu}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \qquad (6.19)$$

である. これを λ で微分することによって，ほとんどいたるところ

$$\frac{1}{2\pi} = |\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 f_{xx}(\lambda) \qquad (6.20)$$

を得る。(6.20) より明らかに f_{xx} はほとんどいたるところ正である。

2° 今度は，関数 F_{xx} が絶対連続で f_{xx} がほとんどいたるところ正であることを仮定しよう。F_{xx} の絶対連続性から，すでに定理16によって，$\{x(t)\}$ は空間 H_x のある拡張 H' に属するある基本的な列 $\{u(t)\}$ から移動和によって得られることがわかる。式 (6.9) によって，ほとんどいたるところ

$$|\varphi_x^{(u)}(\lambda)|^2 = 2\pi f_{xx}(\lambda) \neq 0$$

が成りたつ.

したがって定理10によって，列 $\{u(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する (すなわち，空間 H_x に属する). このようにして定理の

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

条件の十分性と同時に主張Aが示された.

$\{x(t)\}$ に subordinate な列 $\{u(t)\}$ は,

$$F_{uu}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 f_{xx}(\lambda)d\lambda=\frac{\lambda+\pi}{2\pi}$$

のとき, すなわちほとんどいたるところ

$$|\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2 f_{xx}(\lambda)=\frac{1}{2\pi} \tag{6.21}$$

のときかつそのときに限って基本的である. このようにして主張Cが示された。

$\{x(t)\}$ に subordinate する任意の基本的な列 $\{u(t)\}$ に対して (6.21) が成りたつので, ほとんどいたるところ $|\varphi_u^{(x)}(\lambda)|^2\neq 0$ である. したがって定理10によって, 列 $\{x(t)\}$ は $\{u(t)\}$ に subordinate し, したがって定理15によって, $\{x(t)\}$ は $\{u(t)\}$ から移動和によって得られる. これで主張Bが示された.

§7. Wold 分解

任意の定常列 $\{x(t)\}$ に対して, すべての $x(s)$, $s\leq t$, を含む H_x の最小の線型閉部分空間を $H_x(t)$ で表わし, すべての $H_x(t)$ の交わりを S_x で表わす. 明らかに

$$U_x^k H_x(t)=H_x(t+k), \tag{7.1}$$

$$U_x^k S_x=S_x \tag{7.2}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が成りたつ.

定義8. 定常列 $\{x(t)\}$ は, もし

$$S_x = H_x \tag{7.3}$$

であれば, 特異であるといわれる.

明らかに, 特異な列に対して, t が何であっても

$$H_x(t) = H_x \tag{7.4}$$

が成りたつ。逆に, もし等式(7.4)がある t に対して成りたてば, 列 $\{x(t)\}$ は特異である. 実際, 等式(7.4)がある t に対して成りたてば, (7.1)によってすべての t に対して(7.4)が成りたつ. したがって $S_x = H_x$ である.

$x(t)$ の空间 S_x への射影を $s_x(t)$ で表わす. 容易にわかるように, $\{s_x(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する特異な定常列であって,

$$S_{s_x} = H_{s_x} = S_x \tag{7.5}$$

が成りたつ。列 $\{s_x(t)\}$ は列 $\{x(t)\}$ の特異成分と名づけられる.

さて, 列 $\{x(t)\}$ は特異でないと仮定しよう. そのとき $x(t)$ はつぎの形に一意に表現される,

$$x(t) = \xi(t) + \Delta(t)\ . \tag{7.6}$$

ここで $\xi(t)$ は $H_x(t-1)$ に属し, $\Delta(t) \neq 0$ は $H_x(t-1)$ に直交している。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$u_x(t) = \frac{\Delta(t)}{\|\Delta(t)\|} \tag{7.7}$$

とおく．容易にわかるように，要素

$$u_x(t),\ u_x(t-1),\ \cdots,\ u_x(t-n),\ \cdots$$

は空間

$$H_x(t) \ominus S_x$$

で完全正規直交系をなす．$x(t)$ は $H_x(t)$ に属するので，$x(t)$ は

$$x(t) = s_x(t) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} u_x(t-n) \tag{7.8}$$

の形に一意に表現される．列 $\{u_x(t)\}$ は定常で $\{x(t)\}$ に subordinate するから，式(7.8)における係数

$$c_n^{(x)} = (x(t), u_x(t-n)) = B_{xu}(n) \tag{7.9}$$

は t に無関係である．(7.6)と(7.7)から

$$c_0^{(x)} = \|\Delta(t)\| > 0 \tag{7.10}$$

を得る．

特異でない列の(7.8)の形での表現は Wold分解と名づけられる．以上に述べたことから

$$s(t) = s_x(t),\quad u(t) = u_x(t),\quad c_n = c_n^{(x)}$$

はつぎの性質をもつことがわかる：

W_1．列 $\{s(t)\}$ は特異で $\{x(t)\}$ に subordinate している．

W_2．$\{u(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する基本的な列である

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

W_3. $u(t)$ は空間 $H_x(t)$ に属する.

W_4. 列 $\{s(t)\}$ と $\{u(t)\}$ はたがいに直交している.

W_5. $c_0 > 0$.

つぎの定理は (7.8) の分解が上述の5つの性質によって一意に定まることを示す.

定理 18. もし定常列 $\{x(t)\}$ が

$$x(t) = s(t) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t-n) \tag{7.11}$$

の形に表現され, 列 $\{s(t)\}$, $\{u(t)\}$ と係数 c_n が条件 $W_{1\text{-}5}$ をみたすならば, 列 $\{x(t)\}$ は特異でなくかつ

$$s(t) = s_x(t), \quad u(t) = u_x(t), \quad c_n = c_n^{(x)}$$

である.

証明. $x(t')$ とすべての $u(t'-n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は(条件 W_3 によって) $H_x(t')$ に属するので

$$s(t') = x(t') - \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t'-n)$$

も $H_x(t')$ に属する. $t' \leq t$ のとき $H_x(t')$ は $H_x(t)$ に含まれるので, すべての $s(t')$, $t' \leq t$, は $H_x(t)$ に属する. したがって $H_s(t)$ は $H_x(t)$ に含まれる. 条件 W_1 により $S_s = H_s(t)$ だから S_s はすべての $H_x(t)$ に含まれ, したがって S_x に含まれる. ゆえに, すべての $s(t')$ は S_x に, したがってすべての $H_x(t)$ に属することがわかる.

式 (7.11) を

$$x(t) = \zeta(t) + c_0 u(t) \tag{7.12}$$

の形に書き直そう，ただし

$$\zeta(t) = s(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u(t-n)$$

である．$s(t)$ とすべての $u(t-n)$，$n=1,2,3,\cdots$，は $H_x(t-1)$ に属するので，$\zeta(t)$ も $H_x(t-1)$ に属する．すべての $x(t')$，$t'<t$，は要素 $s(t'')$，$u(t'')$，$t''<t$，の一次結合で表わされ，$u(t)$ はすべての $s(t'')$，$u(t'')$，$t''<t$，と直交しているから，$u(t)$ はすべての $x(t')$，$t'<t$，と直交し，したがって空間 $H_x(t-1)$ と直交している．

このことから，$\zeta(t)$ が $H_x(t-1)$ に属し，$u(t)$ が $H_x(t-1)$ に直交していることがわかる。さらに (7.12) を (7.6) と比べて

$$\zeta(t) = \xi(t)$$

$$c_0 u(t) = \Delta(t) \tag{7.13}$$

であることがわかる。

(7.13) と (7.7) を比べ，条件 W_5 によって

$$u(t) = u_x(t) \tag{7.14}$$

であることがわかる。

W_2 と W_4 によって，(7.11) から

$$c_n = (x(t), u(t-n)) \tag{7.15}$$

であることがわかる．(7.14)，(7.15) と (7.9) より

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$c_n = c_n^{(x)} \tag{7.16}$$

を得る.

(7.8) と (7.11) を比べ，(7.15) と (7.16) を考慮して，最後に

$$s(t) = s_x(t)$$

を得る.

§8. 正則列

定理 19. 定常列 $\{x(t)\}$ が，基本的な列 $\{u(t)\}$ によって

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t-n) \tag{8.1}$$

の形に表現されるための必要十分条件は

$$s_x(t) = 0 \tag{8.2}$$

である.

もし $x(t) = 0$ ならば，条件 $s_x(t) = 0$ が満たされ，(8.1) の表現が可能である (すべての係数 c_n が 0 に等しいとして). $x(t) \neq 0$ の場合を考えよう. この場合も条件 $s_x(t) = 0$ の十分性は明らかである：もし $s_x(t) = 0$ かつ $x(t) \neq 0$ ならば，列 $x(t)$ は特異でなく，前節の式 (7.8) によって

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} u_x(t-n) \tag{8.3}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

の形に表現される.

条件 (8.2) の必要性を示そう. そのために, 表現 (8.1) が存在する場合に, 空間 $H_x(t)$ が空間 $H_u(t)$ に含まれ, 空間 S_x が空間 S_u に含まれることを注意しよう. したがって, 基本列に対して成りたつ等式

$$S_u = 0 \tag{8.4}$$

から, $S_x = 0$ したがって $\Delta_x(t) = 0$ が得られる.

定義 9. 定常列 $\{x(t)\}$ は, もし

$$x(t) \neq 0, \quad \Delta_x(t) = 0$$

であれば, 正則であるといわれる.

もし $\{u(t)\}$ が基本的な列であれば, (8.1) は §6で詳しく調べた表現の特別な場合である. したがって, (6.7), (6.8), (6.12) に対応して

$$\left.\begin{aligned} B_{xu}(n) &= c_n, \quad n \geq 0 \\ B_{xu}(n) &= 0, \quad n < 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|x(t)\|^2 = B_{xx}(0) \tag{8.6}$$

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-in\lambda} \tag{8.7}$$

である.

(8.6) のゆえに, 級数

$$\Gamma_x^{(u)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \tag{8.8}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

は円板 $|\zeta|<1$ で解析関数を表わす．その $|\zeta|=1$ における境界値は，(8.7) のゆえに，式

$$\Gamma_x^{(u)}(e^{-i\lambda})=\varphi_x^{(u)}(\lambda) \tag{8.9}$$

によって与えられる[1]．

条件 $x(t)\neq 0$ をおけば，$\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ が恒等的に 0 に等しいことはありえない。したがって[2]，$-\pi\leq\lambda\leq+\pi$ 上ほとんどいたるところ

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda)\neq 0 \tag{8.10}$$

である．式 (6.9) によって，ほとんどいたるところ

$$\frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=f_{xx}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\varphi_x^{(u)}(\lambda)\right|^2 \tag{8.11}$$

であるから，(8.10) から，ほとんどいたるところ

$$f_{xx}(\lambda)>0 \tag{8.12}$$

であることがわかる．したがって，定理 17 によって，列 $\{u(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する．

<u>定理 20.</u> もし正則列 $\{x(t)\}$ が基本的な列 $\{u(t)\}$ によって (8.1) の形に表現されるならば，列 $\{u(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate する．

---

1) (訳注) 附録I 定理3.1の系を参照せよ．

2) 例えば，I. I. Privalov の本 (5) の39頁を参照せよ．
(訳注) 附録I 定理3.5の系を参照せよ．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

基本的な列 $\{u(t)\}$ に subordinate している定常列 $\{x(t)\}$ が，$\{u(t)\}$ によって (8.1) の形に表わされるための必要十分条件は，$|\zeta|=1$ に対して等式

$$\gamma_x^{(u)}(e^{-i\lambda}) = \varphi_x^{(u)}(\lambda) \tag{8.13}$$

によって定義される関数 $\gamma_x^{(u)}(\zeta)$ が，$|\zeta|<1$ で式

$$\Gamma_x^{(u)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\gamma_x^{(u)}(\xi)\,d\xi}{\xi-\zeta} \tag{8.14}$$

によって定められる解析関数 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ の境界値に円周 $|\zeta|=1$ 上ほとんどいたるところ一致することである．もしこの条件がみたされるならば，式 (8.1) の係数 c_n は (8.8) から定まる．

定理の最初の部分，第2の部分の条件の必要性および係数 c_n と関数 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ の間の関係式についての主張はすでに前に証明した．

定理の第2の部分の条件の十分性を示すことが残っている．

もしこの条件がみたされるならば，境界値 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ に対して Fourier 級数への展開

$$\gamma_x^{(u)}(e^{-i\lambda}) = \varphi_x^{(u)}(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-in\lambda} \tag{8.15}$$

が成りたつ．

(8.15) を (6.12) と (6.7) に比べることによって，$x(t)$ は

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(8.15) あるいは同じことだが (8.8) によって定まる c_n の係数として (8.1) の形に表現されることがわかる。定理20の証明は終った.

定理21. 任意の正則列 $\{x(t)\}$ に対し, 関数

$$\Gamma_x(\zeta) = \Gamma_x^{(u_x)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} \zeta^n \tag{8.16}$$

は円板の内部 $|\zeta|<1$ に零点を持たない.

定理の主張に反して, $\Gamma_x(\zeta)$ が円板 $|\zeta|<1$ に零点 ζ_0 を持つと仮定しよう. $\{u_x(t)\}$ に subordinate する列 $\{u(t)\}$ で

$$\varphi_u^{(u_x)}(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda} - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 e^{-i\lambda}} \tag{8.17}$$

であるようなものを構成しよう. このような列は定理8によって存在する, 何故なら関数

$$\varphi(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda} - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 e^{-i\lambda}}$$

は有界で, したがって, クラス $L^2_{u_x} = L^2$ に属するから。

容易に計算できるように, 任意の λ に対して

$$|\varphi_u^{(u_x)}(\lambda)|^2 = 1 . \tag{8.18}$$

さらに

$$f_{u_x u_x}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} F_{u_x u_x}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda + \pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

だから, (8.18) から定理17の主張Cによって, $\{u(t)\}$ は基本的な列で

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ある。

式(4.5)によって

$$F_{xu}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_x^{(u_x)}(\lambda)\,\overline{\varphi}_u^{(u_x)}(\lambda)\, dF_{u_x u_x}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_x^{(u_x)}(\lambda)\,\overline{\varphi}_u^{(u_x)}(\lambda)\, d\lambda . \tag{8.19}$$

(4.6)と(8.19)から，ほとんどいたるところ

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda) = \frac{dF_{xu}(\lambda)}{dF_{uu}(\lambda)} = 2\pi\,\frac{dF_{xu}(\lambda)}{d\lambda} = \varphi_x^{(u_x)}(\lambda)\,\overline{\varphi}_u^{(u_x)}(\lambda) \tag{8.20}$$

であることがわかる。

(8.18)により

$$\overline{\varphi}_u^{(u_x)}(\lambda) = \frac{1}{\varphi_u^{(u_x)}(\lambda)} .$$

したがって式(8.20)は

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda) = \frac{\varphi_x^{(u_x)}(\lambda)}{\varphi_u^{(u_x)}(\lambda)} \tag{8.21}$$

の形に書ける。

(8.9)と(8.16)のゆえに

$$\varphi_x^{(u_x)}(\lambda) = \Gamma_x^{(u_x)}(e^{-i\lambda}) = \Gamma_x(e^{-i\lambda}) . \tag{8.22}$$

(8.21), (8.22)と(8.17)から

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda) = \Gamma_x(e^{-i\lambda})\,\frac{1-\overline{\zeta}_0 e^{-i\lambda}}{e^{-i\lambda}-\zeta_0} \tag{8.23}$$

であることがわかる.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

容易にわかるように，

$$\gamma_x^{(u)}(e^{-i\lambda}) = \varphi_x^{(u)}(\lambda)$$

は関数

$$\Gamma_x^{(u)}(\zeta) = \Gamma_x(\zeta)\,\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0} \tag{8.24}$$

の $|\zeta|=1$ における境界値にほとんどいたるところ一致する。

ζ_0 は関数 $\Gamma_x(\zeta)$ の零点だから，関数 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ は $|\zeta|<1$ で解析的である。この時，定理20によって[1)]

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t-n), \tag{8.25}$$

ここで係数 c_n は式(8.8)によって定められる。関数

$$\gamma_u^{(ux)}(e^{-i\lambda}) = \varphi_u^{(ux)}(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda}-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 e^{-i\lambda}}$$

は，円板 $|\zeta|<1$ で解析的な関数

$$\Gamma_u^{(ux)}(\zeta) = \frac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta} \tag{8.26}$$

---

1) 定理20が適用できるためには，関数 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ がその境界値 $\gamma_x^{(u)}(e^{-i\lambda})$ によって Cauchy 積分の形に表わされることが本質的である。実際にそうであることは，例えば F. Riesz の仕事(6)の94頁の注意Cから出る，何故なら明らかに関数 $\Gamma_x^{(u)}(\zeta)$ は関数 $\Gamma_x(\zeta)$ と同様に，F. Riesz のこの仕事の意味でクラス H_1 に属するから．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

の境界値と円周 $|\zeta|=1$ 上でほとんどいたるところ一致する．したがって，定理20によって

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n u_x(t-n) \tag{8.27}$$

を得る，ここに d_n は関数 $\Gamma_u^{(u_x)}(\zeta)$ のTaylor級数の係数である．式(8.27)は $u(t)$ が $H_{u_x}(t)$ に属することを意味する．列 $\{u_x(t)\}$ の性質 W_3（§7参照）によって，$H_{u_x}(t)$ は $H_x(t)$ に含まれるので，$u(t)$ は $H_x(t)$ に属する．

以上のことから，すべての $u(t-n)$, $n>0$, は $H_x(t-1)$ に入ることがわかる。したがって，式(8.25)と(7.6)を比べて

$$c_0 u(t) = \Delta(t)$$

であることがわかる，そして(7.7)と(7.10)により

$$c_0 u(t) = c_0^{(x)} u_x(t).$$

容易にわかるように，式

$$u(t)=\frac{c_0^{(x)}}{c_0} u_x(t)$$

によって定められる列 $\{u(t)\}$ は関数

$$\varphi_u^{(u_x)}(\lambda)=\frac{c_0^{(x)}}{c_0} \tag{8.28}$$

に対応しなければならない。(8.28)と(8.17)の間の矛盾は定理21を示す．

<u>定理22.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が正則であるためには，つぎの諸条件が

$-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上でみたされることが必要かつ十分である:

1) 関数 $F_{xx}(\lambda)$ は絶対連続;

2) 関数 $f_{xx}(\lambda)$ はほとんどいたるところ正;

3) 関数 $\log f_{xx}(\lambda)$ は可積分.

もしこれらの条件がみたされるならば,

$$\Gamma_x(\zeta) = \sqrt{2\pi}\, e^{Q_x(\zeta)} \tag{8.29}$$

$$Q_x(\zeta) = \frac{a_0^{(x)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(x)} + i b_k^{(x)}) \zeta^k. \tag{8.30}$$

ここに係数 a_k, b_k は展開

$$\frac{1}{2} \log f_{xx}(\lambda) \sim \frac{a_0^{(x)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(x)} \cos k\lambda + b_k^{(x)} \sin k\lambda) \tag{8.31}$$

によって定まる。

各正則列 $\{x(t)\}$ はそれに subordinate する基本的な列 $\{u_x(t)\}$ から移動和によって得られるので, 条件1と2の必要性は定理17から出る。条件3の必要性を示そう. もし列 $\{x(t)\}$ が正則であれば, 定理21によって関数 $\Gamma_x(\zeta)$ は円板 $|\zeta| < 1$ 内で解析的であって 0 にはならない. 実数値

$$\log \frac{\Gamma_x(0)}{\sqrt{2\pi}} = \log \frac{c_0^{(x)}}{\sqrt{2\pi}}$$

から連続的に得られる値 $\log(\Gamma_x(\zeta)/\sqrt{2\pi})$ を $Q_x(\zeta)$ で表わそう.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

関数 $\Gamma_x(\zeta)$ に零点がないから，関数 $Q_x(\zeta)$ は円板 $|\zeta|<1$ 内のすべての点で一意に定まる．関数 $Q_x(\zeta)$ の実数部に対して，(8.29) のゆえに

$$\mathcal{R}Q_x(\zeta)=\log|\Gamma_x(\zeta)|-\frac{1}{2}\log 2\pi \tag{8.32}$$

が成りたつ．

$\mathcal{R}Q_x(\zeta)>0$ のとき $\mathcal{R}Q_x(\zeta)$ に等しく，$\mathcal{R}Q_x(\zeta)\leq 0$ のとき 0 に等しい関数を $\mathcal{R}^+Q_x(\zeta)$ で表わそう．(8.32) より

$$\mathcal{R}^+Q_x(\zeta)<\log^+|\Gamma_x(\zeta)|\leq|\Gamma_x(\zeta)|$$

が表るので，任意の $\rho<1$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{R}^+Q_x(\rho e^{-i\lambda})d\lambda<\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma_x(\rho e^{-i\lambda})|d\lambda$$

$$\leq\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_x^{(n_x)}(\lambda)|d\lambda=K.$$

さらに

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{R}Q_x(\rho e^{-i\lambda})d\lambda=2\pi\mathcal{R}Q_x(0)$$

だから

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{R}Q_x(\rho e^{-i\lambda})|d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}[2\mathcal{R}^+Q_x(\rho e^{-i\lambda})-\mathcal{R}Q_x(\rho e^{-i\lambda})]d\lambda$$

$$\leq 2K-2\pi\mathcal{R}Q_x(0).$$

この不等式により，境界値

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\mathcal{R}Q_x(e^{-i\lambda}) = \log\left|\frac{\Gamma_x(e^{-i\lambda})}{\sqrt{2\pi}}\right| = \log\left|\frac{\varphi_x^{(u_x)}(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\varphi_x^{(u_x)}(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 = \frac{1}{2}\log f_{xx}(\lambda) \qquad (8.33)$$

は λ について可積分であることがわかる。このようにして $\log f_{xx}(\lambda)$ が可積分であること，すなわち定理の条件3，の必要性が証明された。

定理の条件の十分性を証明する前に，任意の正則列 $\{x(t)\}$ に対し関数 $\Gamma_x(\zeta)$ が式 (8.29), (8.30) と (8.31) によって定まることを示そう。証明されたように，正則列 $\{x(t)\}$ に対して $\frac{1}{2}\log f_{xx}(\lambda)$ は可積分だから，この関数に対して Fourier 展開 (8.31) が存在する。

(8.33) と (8.31) により

$$\mathcal{R}Q_x(e^{i\lambda}) \sim \frac{a_0^{(x)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(x)}\cos k\lambda - b_k^{(x)}\sin k\lambda) \qquad (8.34)$$

を得る。

$$Q_x(0) = \log\frac{\Gamma_x(0)}{\sqrt{2\pi}} = \log\frac{c_0^{(x)}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (8.35)$$

は実数だから，虚数部 $\mathcal{I}Q_x(e^{i\lambda})$ は式

$$\mathcal{I}Q_x(e^{i\lambda}) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(x)}\sin k\lambda + b_k^{(x)}\cos k\lambda) \qquad (8.36)$$

で表わされる。

(8.34) と (8.36) から (8.30) が出る。最後に，式 (8.29) は $Q_x(\zeta)$ の定義自身から出る。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

さて定理の条件の十分性の証明にとりかかろう。そのために，それらの条件がみたされていると仮定し，

$$Q(\zeta) = \frac{a_0^{(x)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(x)} + i b_k^{(x)}) \zeta^k, \tag{8.37}$$

$$\Gamma(\zeta) = \sqrt{2\pi}\, e^{Q(\zeta)} \tag{8.38}$$

とおこう，ここに係数 $a_k^{(x)}$ と $b_k^{(x)}$ は展開 (8.31) から定める。そのとき[1]

$$\begin{aligned} \log \frac{|\Gamma(\rho e^{-i\lambda})|^2}{2\pi} &= 2\Re Q(\rho e^{-i\lambda}) \\ &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k^{(x)} \cos k\lambda + b_k^{(x)} \sin k\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\mu) P_\rho(\mu - \lambda)\, d\mu \end{aligned} \tag{8.39}$$

ただし

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}. \tag{8.40}$$

幾何平均と算術平均の間の不等式[2]によって

$$\frac{|\Gamma(\rho e^{-i\lambda})|^2}{2\pi} \leq \int_{-\pi}^{\pi} f_{xx}(\mu) P_\rho(\mu - \lambda)\, d\mu \tag{8.41}$$

---

1) (5) の 15頁を参照せよ。

2) この不等式として次の形を用いる：もし $m = \int_a^b P(x) f(x)\, dx$，$\log s = \int_a^b P(x) \log f(x)\, dx$，$\int_a^b P(x)\, dx = 1$，$P(x) \geq 0$，$f(x) \geq 0$ ならば，$s \leq m$ である。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

を得る．関数 $f_{xx}(\lambda)$ は可積分で $\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\mu-\lambda)d\mu = 1$ だから，(8.41) により

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(\rho e^{i\lambda})|^2 d\lambda \leq \int_{-\pi}^{\pi} f_{xx}(\mu)\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\mu-\lambda)d\lambda d\mu$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f_{xx}(\lambda)d\lambda. \qquad (8.42)$$

こうして得られた不等式 (8.42) の左辺の積分の有界性は，関数 $\Gamma(\zeta)$ のその境界値

$$\Gamma(e^{-i\lambda}) = \varphi(\lambda)$$

による Cauchy 積分の形での表現を保証する[1]．

(8.38)，(8.37) と (8.31) により

$$|\varphi(\lambda)|^2 = |\Gamma(e^{-i\lambda})|^2 = 2\pi e^{2\Re Q(e^{-i\lambda})} = 2\pi f_{xx}(\lambda) \qquad (8.43)$$

である．したがって

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|\varphi(\lambda)|^2}dF_{xx}(\lambda) = 1$$

であり，関数 $1/\varphi(\lambda)$ はクラス L_x^2 に属する．$\{x(t)\}$ に subordinate する列 $\{u(t)\}$ であって

$$\varphi_u^{(x)}(\lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)}$$

となるものを見つけよう．等式 (8.43) と定理 17 C により，$\{u(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に同値な基本的な列である．定理 10 により

1) (6) の 94 頁の注意 C を参照せよ．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\varphi_x^{(u)}(\lambda) = \frac{1}{\varphi_u^{(x)}(\lambda)} = \varphi(\lambda) = \Gamma(e^{-i\lambda})$$

である．このように列 $\{u(t)\}$ は定理20の第2の部分のすべての条件をみたす．したがって，$\{x(t)\}$ は $\{u(t)\}$ によって(8.1)の形に表現され，これは定理22の条件の十分性を示す．容易にわかるように，構成された列 $\{u(t)\}$ は実際に $\{u_x(t)\}$ に一致する．

さらに最後に，(8.30)と(8.35)から式

$$c_0^{(x)} = \sqrt{2\pi}\, e^{Q_x(0)} = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{a_0^{(x)}}{2}}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\lambda)d\lambda} \tag{8.44}$$

が導かれることを注意しよう．[1)]

§9. 特異な列と特異な成分のスペクトルの性質

§7の結果によれば，特異でない定常列 $\{x(t)\}$ は

$$x(t) = s_x(t) + r_x(t) \tag{9.1}$$

の形に表現される，ここに

$$r_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} u_x(t-n). \tag{9.2}$$

---

1) 次節の定理23から明らかなように，この式は単に正則な列に対してだけでなく，特異でない任意の列に対しても成りたつ．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

列 $\{r_x(t)\}$ は列 $\{x(t)\}$ の正則な成分[1]と名づけられる。明らかに，それはつねに $\{x(t)\}$ に subordinate していて正則である。

任意の定常列 $\{x(t)\}$ に対して

$$A_{xx}(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda} f_{xx}(\lambda)\,d\lambda \tag{9.3}$$

$$D_{xx}(\lambda)=F_{xx}(\lambda)-A_{xx}(\lambda) \tag{9.4}$$

とおく。

つぎの三つの場合を区別しよう：

1) 正測度の集合上で $f_{xx}(\lambda)=0$；

2) 測度 0 の集合の上でのみ $f_{xx}(\lambda)=0$ であるが関数 $\log f_{xx}(\lambda)$ は可積分ではない；

3) 測度 0 の集合の上でのみ $f_{xx}(\lambda)=0$ であり，関数 $\log f_{xx}(\lambda)$ は可積分である。

<u>定理 23.</u> 1 と 2 の場合に列 $\{x(t)\}$ は特異である。3 の場合には，列 $\{x(t)\}$ は特異でなく

$$F_{s_x s_x}(\lambda)=D_{xx}(\lambda),\quad F_{r_x r_x}(\lambda)=A_{xx}(\lambda) \tag{9.5}$$

かつ展開 (9.2) の係数 $c_0^{(x)}$ は式 (8.16) によって定められる，ただし関数

---

1) 恒等的に 0 に等しい列は特異であって正則ではないので，正則な列では特異な成分は 0 に等しく，そして特異な列には正則な成分はない。

$\Gamma_x(\zeta)$ は式 (8.29), (8.30), (8.31) によって定められる。

証明. 列 $\{x(t)\}$ が特異でないと仮定しよう。そのとき, 列 $\{r_x(t)\}$ は正則だから, 定理22によって, 関数 $f_{r_x r_x}(\lambda)$ はほとんどいたるところ正であり, 関数 $\log f_{r_x r_x}(\lambda)$ は可積分である. 列 $\{s_x(t)\}$ と $\{r_x(t)\}$ はたがいに直交している(§7参照)ので, 定理11によって

$$F_{xx}(\lambda) = F_{s_x s_x}(\lambda) + F_{r_x r_x}(\lambda) \tag{9.6}$$

であり, したがってほとんどいたるところ

$$f_{xx}(\lambda) = f_{s_x s_x}(\lambda) + f_{r_x r_x}(\lambda). \tag{9.7}$$

(9.7) により, ほとんどいたるところ

$$f_{xx}(\lambda) \geqq f_{r_x r_x}(\lambda) > 0 \tag{9.8}$$

である. したがって Lebesgue 測度正の各集合は $F_{xx}(\lambda)$ に関しても正測度をもつ.

$\{s_x(t)\}$ と $\{r_x(t)\}$ は $\{x(t)\}$ に subordinate しているから, 定理12 によって $F_{xx}(\lambda)$ に関して, したがって Lebesgue 測度に関して, ほとんどいたるところ

$$\frac{dF_{s_x s_x}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} \cdot \frac{dF_{r_x r_x}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} = 0.$$

(9.8) のゆえにほとんどいたるところ

$$\frac{dF_{r_x r_x}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} = \frac{f_{r_x r_x}(\lambda)}{f_{xx}(\lambda)} > 0$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

だから，ほとんどいたるところ

$$\frac{dF_{s_x s_x}(\lambda)}{dF_{xx}(\lambda)} = \frac{f_{s_x s_x}(\lambda)}{f_{xx}(\lambda)} = 0$$

すなわち

$$f_{s_x s_x}(\lambda) = 0, \qquad (9.9)$$

$$f_{xx}(\lambda) = f_{r_x r_x}(\lambda). \qquad (9.10)$$

式(9.10)，$f_{r_x r_x}(\lambda)$ がほとんどいたるところ正であることおよび $\log f_{r_x r_x}(\lambda)$ の可積分性により，特異でない列に対して3の場合が常に成りたつことがわかる。

逆に，3の場合に列 $\{x(t)\}$ が特異でないことを示そう。定理14によって，3の場合に列 $\{x(t)\}$ は，たがいに直交し $\{x(t)\}$ に subordinate する列の和

$$x(t) = s(t) + r(t)$$

に一意に分解され，

$$F_{ss}(\lambda) = D_{xx}(\lambda), \quad F_{rr}(\lambda) = A_{xx}(\lambda)$$

である。定理22により，列 $\{r(t)\}$ は正則である。したがって

$$x(t) = s(t) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(r)} u_r(t-n). \qquad (9.11)$$

式(9.11)は，空間 $H_x(t)$ が空間 $S_s \oplus H_{u_r}(t)$[1] に含まれることを意味

1) $G_1 \oplus G_2$ は G_1 と G_2 を含む空間 H の最小の線型閉部分空間を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

する． $x(t+1)$ を

$$x(t+1)=\alpha+\beta$$

の形に表わそう，ただし

$$\alpha=c_0^{(r)}u_r(t+1), \quad \beta=s(t+1)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(r)}u_r(t-n+1).$$

容易にわかるように，β は空間 $S_s\oplus H_{u_r}(t)$ に属し，$\alpha\neq 0$ はその空間に直交している。したがって $x(t+1)$ は空間 $S_s\oplus H_{u_r}(t)$ に，したがって空間 $H_x(t)$ に属さない。ゆえに，列 $\{x(t)\}$ は特異でない．

任意の特異でない列 $\{x(t)\}$ に対して，前に式 (9.10) を示した．したがって，(8.29)，(8.30) と (8.31) によって定まる関数 $\Gamma_x(\zeta)$ は $\Gamma_{r_x}(\zeta)$ に一致する。係数 $c_n^{(x)}$ が関数 $\Gamma_x(\zeta)$ の展開 (8.16) から得られることを示すためには

$$c_n^{(x)}=c_n^{(r_x)} \tag{9.12}$$

を示せばよい。そのためには，展開 (9.2) が（特異な成分が 0 に等しいとして）条件 W_{1-5} をみたすことを示せば十分である．条件 W_1，W_2，W_4 と W_5 がみたされることは直ちに明らかである．展開 (9.2) に対して条件 W_3 が成りたつことを示そう。そのために，(9.8) と定理17A によって，列 $\{u_x(t)\}$ は $\{r_x(t)\}$ に subordinate していることに注意しよう。(9.1) と (9.2) から明らかに，$H_x(t)$ は $S_x\oplus H_{r_x}(t)$ に含まれる．$u_x(t)$ は $H_x(t)$ に属し S_x に直交している（§7参照）から，$u_x(t)$ は

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$H_{r_x}(t)$ に属する，そしてこれは展開 (9.2) が条件 W_3 をみたすことを意味する．

特異でない列に対する式 (9.5) は，(9.1)，(9.10) と $F_{r_x r_x}(\lambda)$ の絶対連続性（列 $\{r_x(t)\}$ の正則性によって定理16で示された）から直接にでる．

§10. 最小列

任意の定常列 $\{x(t)\}$ に対して，すべての $x(s)$，$s \neq t$，を含む空間 H_x の最小の線型閉部分空間を $\hat{H}_x(t)$ で表わそう．

$$U_x^{k}\hat{H}_x(t) = \hat{H}_x(t+k) \qquad (10.1)$$

だから，つぎの二つの場合の一つのみが可能である：すべての $\hat{H}_x(t)$ が H_x に一致するか，すべての $\hat{H}_x(t)$ が H_x と異なるかである．

定義10. もし

$$\hat{H}_x(t) \neq H_x \qquad (10.2)$$

であれば，定常列は最小であるといわれる．

列 $\{x(t)\}$ の各元 $x(t)$ は和

$$x(t) = v(t) + \delta(t) \qquad (10.3)$$

ただし $v(t)$ は $\hat{H}_x(t)$ に属し，$\delta(t)$ は $\hat{H}_x(t)$ に直交する，の形に一意に表わされる．

Sem. on Probab.
Vol.39　1973年
P1-184

$$d_x = |\delta(t)| \tag{10.4}$$

とおく．明らかに，条件

$$d_x > 0 \tag{10.5}$$

は列 $\{x(t)\}$ の最小性のために必要かつ十分である．

<u>定理24.</u>　定常列 $\{x(t)\}$ は，もし関数 $f_{xx}(\lambda)$ がほとんどいたるところ正で積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)} \tag{10.6}$$

が有限のとき，そのときに限って最小である．

もしこの条件がみたされるならば，

$$d_x^2 = (2\pi)^2 : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}. \tag{10.7}$$

最初に定理の条件の十分性を示そう．もし $f_{xx}(\lambda)$ が定まって有限であれば

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{f_{xx}(\lambda)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

もし $f_{xx}(\lambda)$ が定まらないか無限であれば

$$\varphi(\lambda) = 0$$

とおく．そのとき積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

は有限である．したがって，$\varphi(\lambda)$ はクラス L_x^2 に入り，等式

$$\varphi_y^{(x)}(\lambda) = \varphi(\lambda)$$

は $\{x(t)\}$ に subordinate する列 $\{y(t)\}$ を定め，式 (4.4) により

$$F_{yx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_y^{(x)}(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda) = (\lambda+\pi) : \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}\right)^{1/2}$$

である．

式 (3.3) により，$s \neq t$ のとき

$$(y(t), x(s)) = B_{yx}(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)\lambda}\, dF_{yx}(\lambda) = 0.$$

したがって，元 $y(t)$ は空間 $\hat{H}_x(t)$ に直交する．

$$|y(t)|^2 = B_{yy}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} dF_{yy}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_y^{(x)}(\lambda)|^2\, dF_{xx}(\lambda) = 1 \neq 0$$

だから，空間 H_x は $y(t)$ を含んで $\hat{H}_x(t)$ と一致しない。列 $\{x(t)\}$ の最小性が示された．

定理の条件の必要性を示すために，列 $\{x(t)\}$ が最小であることを仮定しよう．容易にわかるように，列 $\{\delta(t)\}$ は定常で $\{x(t)\}$ に subordinate する。このとき

$$B_{\delta x}(k) = (\delta(t+k), x(t)) = 0, \quad k \neq 0, \tag{10.8}$$

$$B_{\delta x}(0) = (\delta(t), x(t)) = |\delta(t)|^2 = d_x^2. \tag{10.9}$$

したがって，式 (3.9)，(3.10) と (3.11) により

$$F_{\delta x}(\lambda) = d_x^2 \frac{\lambda+\pi}{2\pi}. \tag{10.10}$$

同時に式 (4.4) により

$$F_{\delta x}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_\delta^{(x)}(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda). \tag{10.11}$$

(10.10) と (10.11) から

$$\lambda + \pi = \frac{2\pi}{d_x^2} \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi_\delta^{(x)}(\lambda)\, dF_{xx}(\lambda) \tag{10.12}$$

が得られ，したがって微分して

$$\frac{d\lambda}{dF_{xx}(\lambda)} = \frac{2\pi}{d_x^2} \varphi_\delta^{(x)}(\lambda) \tag{10.13}$$

を得る。[1]「また (10.9) により容易に $H_x = H_\delta$ がわかる。ゆえに定理10 により $d\lambda$ と $dF_{xx}(\lambda)$ はたがいに絶対連続で

$$\frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d_x^2}{2\pi \varphi_\delta^{(x)}(\lambda)} = f_{xx}(\lambda).」$$

定理8 によって積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\delta^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d_x^2}{2\pi f_{xx}(\lambda)} \right|^2 dF_{xx}(\lambda)$$

$$= \frac{d_x^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)} \tag{10.14}$$

は有限である。定理の条件の必要性が証明された。

$$d_x^2 = |\delta(t)|^2 = B_{\delta\delta}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} dF_{\delta\delta}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\delta^{(x)}(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \tag{10.15}$$

---

1) (訳注) これ以后，次の式まで，3～4行が写真版で消えているので「　」の部分は訳者が補ったものである。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

に注意せよ，(10.14)と(10.15)から式(10.7)が得られる．

Komarovkaにて　　　　　　　　1940年10月22日
1940年9月7日－10月21日　　　　受理

引用文献

1. H. Wold, A study in the analysis of stationary time series, Uppsala (1938).
2. H. Cramer, Annals of Mathematics, 41 (1940), 215-230.
3. M. Stone, Linear transformations in Hilbert space, American Mathematical Society Colloquium Publications, 15 (1932).
4. A. Zygmund, Trigonometric Series, I, II. Cambridge (1959) (Second edition). (原文はロシヤ語訳1938年版を引用).
5. I. I. Privalov, Cauchy 積分 , Saratov (1919). (ロシヤ語).
6. F. Riesz, Mathematische Zeitschrift, 18 (1923), 87-95.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

7. A. N. Kolmogorov, Izvestiya AN SSSR (seriya matematicheskaya), 5 (1941), 3-14.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定常な確率変数列の内挿と外挿

ア. エヌ. コルモゴロフ

序. 任意の整数 t $(-\infty<t<\infty)$ に二乗の平均が有限な実確率変数 $x(t)$ を対応させる. 確率変数 $x(t)$ の列 $\{x(t)\}$ は

$$m = Mx(t)$$

と

$$B(k) = M[(x(t+k)-m)(x(t)-m)]^{*}$$

が t に無関係のとき定常であると呼ばれる。一般性を失うことなく

$$m = Mx(t) = 0 \qquad (1)$$

と仮定することができる。このとき

$$B(k) = M[x(t+k)x(t)]. \qquad (2)$$

また

$$B(-k) = B(k) \qquad (3)$$

だから, 二次のモーメント $B(k)$ は $k \geq 0$ のときのみ研究すれば十分である.

条件 (1) を満たす定常確率変数列の線型外挿の問題は, 与えられ

*) 確率変数 y の数学的期待値を My で表わす.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

た $n>0$ と $m\geq 0$ に対して確率変数

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \cdots,\ x(t-n)$$

の一次結合

$$L=a_1x(t-1)+a_2x(t-2)+\cdots+a_nx(t-n)$$

でもって確率変数 $x(t+m)$ の最良の近似となるような実数係数 a_s を選ぶことである。このような近似の精確さの測度としては

$$\sigma^2=M(x(t+m)-L)^2$$

$$=B(0)-2\sum_{s=1}^{n}B(m+s)a_s+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}B(p-q)a_pa_q$$

を考えるのが自然である.

もし，二次のモーメント $B(k)$ が知られているならば，σ^2 を最小にする係数 a_s の値を見つける問題に帰着される．この σ^2 の最小値を $\sigma_E^2(n,m)$ と書く.

明らかに $\sigma_E^2(n,m)$ は n の関数として非増加である．故に極限

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_E^2(n,m)=\sigma_E^2(m) \qquad (4)$$

が存在する。この極限を決定することがこの論文において最初に解決される問題である.

内挿の問題の場合には

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \cdots,\ x(t+n)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \cdots,\ x(t-n)$$

によって $x(t)$ を近似することを考える.

この場合, Q を実数の定数係数をもつ一次結合

$$Q = a_1 x(t+1) + a_2 x(t+2) + \cdots + a_n x(t+n) + $$
$$+ a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \cdots + a_{-n} x(t-n)$$

とするとき

$$\sigma^2 = M(x(t) - Q)^2$$

の最小値を $\sigma_I^2(n)$ で表わす. n を大きくしたとき, $\sigma_I^2(n)$ は増加しないから極限

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2 \qquad (5)$$

が存在する.

我々の第二の問題は σ_I^2 を決定することである. 上に定式化した二つの問題の解は私の論文 [1] に証明なしに報告した*. それらは定常過程のスペクトル理論に関連した概念に基礎をおいている.

定常過程のスペクトル理論は t が連続径数の場合は, ヒンチン [2] によって建設された. 我々に現在興味のある離散径数定常過程の場合は, H. Wold の本 [3] に明白な形で述べられている

*) この論文の公式 (1) はミスプリントである. 正しい公式は

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(I) = \sigma^2(I) = \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}$$

である.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで基本的なのは次の定理である。([3] §17参照。)

定理1. 任意の定常確率変数列 $\{x(t)\}$ に対して，二次のモーメント $B(k)$ は次のように表わされる.

$$B(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \, dW(\lambda) \qquad (6)$$

ここで $W(\lambda)$ は非減少実数値関数で公式

$$W(\lambda) = B(0)\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(k)}{k}\sin k\lambda \qquad (7)$$

で定められる。

非減少関数 $W(\lambda)$ に対して，導関数

$$\omega(\lambda) = \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$$

が存在して，ほとんど到るところ非負可積分である。(訳注：$\omega(\lambda)$ はルベーグ測度に関する密度関数.)

$$\log \omega(\lambda) \leq \omega(\lambda)$$

だから $\omega(\lambda)$ の可積分性より，積分

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log \omega(\lambda)\, d\lambda \qquad (8)$$

は有限であるかまたは $-\infty$ である。(正の測度の集合上で $\omega(\lambda)=0$ ならば $P=-\infty$ と考える。) さらに次の定理が証明される.

定理2. $P=-\infty$ ならば，すべての $m \geq 0$ に対して $\sigma_E^2(m)=0$.

P が有限ならば

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\sigma_E^2(m) = e^P(1+r_1^2+r_2^2+\cdots+r_m^2), \qquad (9)$$

ここで r_s は関係式

$$e^{a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots} = 1 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \cdots \qquad (10)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \log\omega(\lambda)\,d\lambda \qquad (11)$$

によって定められる。

$\omega(\lambda) \geq 0$ だから，積分

$$R = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)} \qquad (12)$$

は有限であるかまたは $+\infty$ である．（$\omega(\lambda)$ が正の測度をもつ集合上で 0 ならば $R=+\infty$ と考える。）

次の定理が証明される．

<u>定理 3.</u>　$R=+\infty$ ならば $\sigma_I^2 = 0$。積分 R が有限ならば

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{R}. \qquad (13)$$

私の論文 [4] で複素ヒルベルト空間の元としての定常列の理論を構成した。この論文の §1 では上に定義した定常確率変数列が [4] で考えた定常列の特別な場合とみなすことができることを示す。このことは上に定式化した定理 1, 2, 3 が論文 [4] の結果の簡単な系として得られることを可能にする．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

以後，点によって分けられた二つの数からなる番号をもつ公式[例えば (8.44)] は [4] の公式に関するものである．

1. 定常確率変数とヒルベルト空間の幾何．

私の本 [5] で提起された確率論の公理系と基本概念の構成から出発しよう．これから考える確率変数は実数だけでなく複素数値もとり得る．

ある確率空間 (F, P) 上で，絶対値の二乗が可積分で，同値な確率変数(すなわち，互いに確率 0 の集合上でだけ相異なる確率変数)を同一視した確率変数の全体よりなる集合 $\mathfrak{H}$ を考える．$\mathfrak{H}$ に内積

$$(x, y) = M(x\bar{y}) \qquad (14)$$

を導入する．$\mathfrak{H}$ のノルムを

$$\|x\|^2 = (x, x) = M|x|^2, \qquad (15)$$

で定義し，$\mathfrak{H}$ の元の和とスカラー積を普通の意味で理解する．

今定義した集合 $\mathfrak{H}$ は，M. Stone の本の公理 A, B, E すなわち，抽象ユニタリー空間のすべての公理を満たすことが容易に確かめられる．

今 $\{x(t)\}$ を，付加条件 (1) を満たす，序で導入した意味の確率空間 (F, P) 上の実確率変数 $x(t)$ の定常列とする．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$x(t)$ が実数であることと (2) より

$$B(h)=M[x(t+h)x(t)]=(x(t+h),x(t)).$$

定義から $B(h)$ は t に依らないから $\{x(t)\}$ は [4] の意味で $\mathfrak{H}$ の定常列である。私は [4] でヒルベルト空間すなわち M. Stone の本 [6] の公理 A, B, E のほかに公理 C と D を満たす空間上の定常列を研究した。しかしながらこの制限は本質的ではない。実際 H_x を列 $\{x(t)\}$ のすべての元を含む $\mathfrak{H}$ の最小の閉部分空間とする。容易にわかるように H_x は可分，すなわち，公理 D を満たす。可分ユニタリー空間はそれ自身ヒルベルト空間であるか，（すなわち，公理 A, B, D と E の外に公理 C を満たす），または，有限次元である。後者の場合はあるヒルベルト空間 H に拡張できる。

かくて，列 $\{x(t)\}$ に対して

$$B(h)=B_{xx}(h)=(x(t+h),x(t)) \tag{16}$$

とおくことによって [4] で得られたすべての結果が適用できる。

2. 定理 1 の証明.

実確率変数 $x(t)$ の場合の公式 (3) と (16) より

$$B_{xx}(-h)=B_{xx}(h). \tag{17}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

故に，公式 (3.10) より

$$W_{xx}(\lambda) = B_{xx}(0)\lambda - \sum_{k\neq 0} \frac{B_{xx}(k)}{ik} e^{-ik\lambda}$$

$$= B_{xx}(0)\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{xx}(k)}{k} \sin k\lambda \qquad (18)$$

を得る．(18) より

$$W_{xx}(-\lambda) = -W_{xx}(\lambda) \qquad (19)$$

が導かれる。最後に (3.1)，(3.9) と (19) より

$$B(k) = B_{xx}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, dF_{xx}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dW_{xx}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos k\lambda\, dW_{x}(\lambda) \qquad (20)$$

を得る．公式 (18) と (3.9) と [4] の定理 2 より容易に $W_{xx}(\lambda)$ は実非減少関数であることがわかる．(18) と (20) を合わせて，関数

$$W(\lambda) = W_{xx}(\lambda)$$

は定理 1 の要求を満たしていることが導かれる．

3. 一般の場合の $\sigma_E^2(m)$.

[4] に従って，$H_x(t-1)$ を元

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \cdots,\ x(t-n),\ \cdots$$

を含む H_x の最小の閉部分空間とする．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

元 $x(t+m)$ は任意の $m \geq 0$ に対して一意に

$$x(t+m)=\xi(t-1,m)+\Delta(t-1,m) \qquad (21)$$

の形に表わされる。ここで $\xi(t-1,m)$ は $H_x(t-1)$ に属し，$\Delta(t-1,m)$ は $H_x(t-1)$ と直交する．

容易に示されるように，実確率変数の定常列の場合

$$\sigma_E^2(m)=\|\Delta(t-1,m)\|^{2} \ (*) \qquad (22)$$

である．

[4] の意味で一般の定常列の場合 $\sigma_E^2(m)$ を定義する公式 (22) を計算しよう。

列 $\{x(t)\}$ が特異のとき $H_x(t-1)=H_x$ だから

(*) よく知られているように $\|\Delta(t-1,m)\|$ は点 $x(t+m)$ の空間 $H_x(t-1)$ への距離に等しい。すなわち $H_x(t-1)$ のすべての元 y に関する $\|x(t+m)-y\|$ の下限である．

$$L=a_1x(t-1)+a_2x(t-2)+\cdots+a_nx(t-n)$$

の形の元は常に $H_x(t-1)$ 上にあるから $\|\Delta(t-1,m)\|$ は距離

$$\|x(t+m)-L\|=\sqrt{M\,|x(t+m)-L|^2} \qquad (*)$$

の下限に等しい．

すべての $x(s)$ が実確率変数のときは (*) の下限は実係数 a_k の場合に制限しても変らない。このとき，それは明らかに $\sigma_E(m)$ と一致する．

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\sigma_E^2(m)=0. \tag{23}$$

もし，列 $\{x(t)\}$ が特異でないならば公式 (7.8) によって

$$x(t+m)=s_x(t+m)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(x)}u_x(t+m-n). \tag{24}$$

ここで，$s_x(t+m)$ と $u_x(t+m-n)$，$n>m$，は $H_x(t-1)$ に属し．$u_x(t+m-n)$，$m\geq n$，は $H_x(t-1)$ と直交するから (21) と (24) を比較して

$$\Delta(t-1,m)=c_0^{(x)}u_x(t+m)+c_1^{(x)}u_x(t+m-1)+\cdots+c_m^{(x)}u_x(t) \tag{25}$$

を得る．元 $u_x(t+i)$ は互いに直交し，正規化されているから (25) より

$$\sigma_E^2(m)=\|\Delta(t-1,m)\|^2=(c_0^{(x)})^2+(c_1^{(x)})^2+\cdots+(c_m^{(x)})^2 \tag{26}$$

が導かれる．

4. 実数の場合の $\sigma_E^2(m)$

実確率変数の定常列に対しては公式 (26) から容易に定理2が導かれる．その結果はこの節で取り扱われる．

公式 (3.9) より

$$f_{xx}(\lambda)=\frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}\frac{dW_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}\omega(\lambda). \tag{27}$$

公式 (19) より

$$\omega(-\lambda)=\omega(\lambda) \tag{28}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

が導かれる。(27)と(28)を使って

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\lambda)d\lambda = 2\int_{0}^{\pi} \log \omega(\lambda)\,d\lambda - 2\pi \log 2\pi \quad (29)$$

を得る.

公式(29)から[4]の定理23によって,等式

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \log \omega(\lambda)\,d\lambda = -\infty$$

が,列 $\{x(t)\}$ が特異であるための必要十分条件であることが導かれる。すでに§3で調べたように

$$\sigma_E^{2}(m) = 0 \quad (30)$$

となるのはこの場合で,かつこの場合に限る.

列 $\{x(t)\}$ が特異でないとき(8.44)と(29)から

$$\left(c_0^{(x)}\right)^2 = 2\pi \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\lambda)d\lambda\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \log \omega(\lambda)d\lambda\right) = e^{P} \quad (31)$$

を得る。

列 $\{x(t)\}$ が特異でないという仮定の下で(*) (8.31),(27)と(28)より $k \geq 0$ に対して

(*) [4]の定理23に示したように公式(8.16)(8.29)(8.30)と(8.31)は任意の特異でない列に適用できる。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

5. σ_I^2 の決定

[4] に従って，$\hat{H}_x(t)$ を元

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \cdots,\ x(t+n),\ \cdots$$

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \cdots,\ x(t-n),\ \cdots$$

を含む H_x の最小の閉部分空間とする。

$x(t)$ は (10.3) によって一意に

$$x(t) = \nu(t) + \delta(t)$$

と表わされる。ここで $\nu(t)$ は $\hat{H}_x(t)$ に属し，$\delta(t)$ は $\hat{H}_x(t)$ と直交する。容易にわかるように実確率変数の定常列の場合，

$$\sigma_I^2 = \|\delta(t)\|^2 = d_x^2 \tag{37}$$

を得る。[4] の定理 24 より

$$d_x^2 = \frac{(2\pi)^2}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}} \tag{38}$$

である。ここで右辺の積分が無限大のときは $d_x^2 = 0$.

(37), (38), (27), (28) より

$$\sigma_I^2 = d_x^2 = \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)}} = \frac{1}{R}$$

が結論される。これは定理 3 を証明している。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\left.\begin{aligned} a_k^{(x)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k\lambda \log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos k\lambda \log \omega(\lambda)\,d\lambda \\ b_k^{(x)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin k\lambda \log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin k\lambda \log \omega(\lambda)\,d\lambda \\ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

を得る.

(8.16), (8.29), (8.30) と (32) から

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)}\zeta^n = \Gamma_x(\zeta) = \Gamma_x(0)\frac{\Gamma_x(\zeta)}{\Gamma_x(0)} = \Gamma_x(0)\,e^{Q_x(\zeta)-Q_x(0)}$$

$$= c_0^{(x)}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(x)}\zeta^k\right) \quad (33)$$

が導かれる。

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(x)}\zeta^k\right) = 1 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \cdots \quad (34)$$

とおくと (33) と (34) を合わせて

$$\frac{c_n^{(x)}}{c_0^{(x)}} = r_n \quad (35)$$

を得る. (35) と (26) より

$$\sigma_E^2(m) = \left(c_0^{(x)}\right)^2\left(1 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_m^2\right) \quad (36)$$

が導かれる。

公式 (30), (31) と (36) によって定理2の証明は完結した.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

References

[1] Kolmogoroff, A.; Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris, 208 (1939), 2043-2045.

[2] Khintchine, A.; Korrelations theorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann., 109 (1934), 604-615.

[3] Wold, H.; A study in the analysis of stationary time series, Uppsala, 1938.

[4] Колмогоров, А. Н.; Стачионарные послеповательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень МГУ (Bulletin de l'Université de Moscou), 2 (1941), n°6.

[5] " ; Основные понятия теории вероятностей, М, 1936.

[6] Stone, M.; Linear transformations in Hilbert space, American Math. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

附録 1. 単位円内の解析関数と調和関数 及び H^p 空間

記号の準備

- 関数 $f(\lambda)$; $[-\pi, \pi)$ 上で定義された複素数値関数.

  必要に応じて $-\infty < \lambda < +\infty$ 上に周期的に拡張した関数とみなすことがある。また $[-\pi, \pi)$ は複素平面上の単位円周 $\{e^{i\lambda}, -\pi \le \lambda < \pi\}$ と位相を含めて同一視することもある。

- $\mathrm{Re}\, f(\lambda)$, $\mathrm{Im}\, f(\lambda)$; $f(\lambda)$ の実部と虚部.

- 有限測度 $d\mu$; $[-\pi, \pi)$ 上のボレル集合上で定義された, 任意のボレル集合に対し有限の値をとる複素数値可算加法的集合関数.

- $L^p[d\lambda] = \left\{ f(\lambda);\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p d\lambda < +\infty \right\}$.

- ポアソン核 $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos\theta + r^2)}$, $\quad 0 \le r < 1$, $-\pi \le \theta < \pi$.

§1. ポアソン核の性質

<u>定理 1.1.</u>

(P-1)
$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}},$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(P-2) $\quad P_r(\theta) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$,

$|z| < 1$ $(z = re^{i\theta})$ で広義絶対一様収束.

(P-3) r を固定するとき $P_r(\theta)$ は $-\infty < \theta < +\infty$ の関数として連続, 周期的, 正値関数.

(P-4) $\quad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$

(P-5) $\quad \displaystyle\sup_{\delta \le |\theta| \le \pi} P_r(\theta) \le \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos\delta + r^2)}$

従って

$$\lim_{r \uparrow 1} \sup_{\delta \le |\theta| \le \pi} P_r(\theta) = 0.$$

(P-6). $d\mu$ を有限測度とするとき

$$f(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \lambda)\, d\mu(\lambda) = f(z)$$

は $z = re^{i\theta}$ の関数として単位円内 $|z| < 1$ で調和, すなわち $z = x + iy$ とおいたとき

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(z) = 0.$$

(P-7) $d\mu$ を有限測度とするとき

$$f(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \lambda)\, d\mu(\lambda)$$
$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n,$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\lambda \, d\mu(\lambda),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\lambda \, d\mu(\lambda),$$

ただし，Σの収束は $|z|<1$ で広義絶対一様収束．

<u>証明</u> (P-4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{1+z}{z(1-z)}\,dz, \quad \left(C_r=\{|z|=r\}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{1-z}\right)dz$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{dz}{z} = 1.$$

(P-6) $d\mu = d\mu_1 + i\,d\mu_2$ とおく。ここで $d\mu_k$ $(k=1,2)$ は有限実数値可算加法的集合関数．

$$f(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,d\mu(\lambda)$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+re^{i(\theta-\lambda)}}{1-re^{i(\theta-\lambda)}}\,d\mu_1(\lambda)$$

$$+ i\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+re^{i(\theta-\lambda)}}{1-re^{i(\theta-\lambda)}}\,d\mu_2(\lambda)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\mu_1(\lambda) \qquad (z = re^{i\theta})$$

$$+ i\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\mu_2(\lambda).$$

容易にわかるように $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\mu_k(\lambda)$ は z の関数として $|z|<1$ で解析的；従ってその実部は調和関数。

(P-7)　(P-2) より

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\theta-\lambda)}\,d\mu(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\lambda) + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{in(\theta-\lambda)} + e^{-in(\theta-\lambda)}\right)d\mu(\lambda)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n\int_{-\pi}^{\pi}(\cos n\theta\cos n\lambda + \sin n\theta \sin n\lambda)\,d\mu(\lambda)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

(q.e.d.)

§2. 単位円内で調和な関数のいくつかの性質

この§では，§1の性質 (P-6) のある意味の逆，すなわちいかなる条件のもとで単位円内で調和な関数は円周上の関数のポアソン積分で表わされるかという問題を考える。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

次のような単位円内で調和な関数のあるクラスを考える.

$S[d\mu] = \{ f(z)$; ある有限測度 $d\mu$ が存在して

$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,d\mu(\lambda)$ と表わされる$\}$.

$p \geq 1$ に対して

$S[p, d\lambda] = \{ f(z)$; $f_p(\lambda) \in L^p[d\lambda]$ が存在して

$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda)\,d\lambda$ と表わされる$\}$.

結局この§では単位円内で調和な関数が $S[d\mu]$ または $S[p, d\lambda]$ に属する条件を求め, その関数と単位円周上の関数または有限測度との対応関係を明らかにすることが目的となる.

定理2.1　$p \geq 1$ に対して

$f(z) \in S[p, d\lambda]$

$\Longleftrightarrow$

(i) $f(z)$ は $|z|<1$ で調和

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda}) - f(r'e^{i\lambda})|^p d\lambda \to 0 \quad (r, r' \uparrow 1)$.

証明 ($\Longrightarrow$) の証明.

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda) f_p(\theta-\lambda)\,d\lambda .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

§1の(P-3), (P-4)から

$$|f_p(\theta)-f(re^{i\theta})| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)(f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda))d\lambda\right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)|f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda)|d\lambda.$$

(P-3), (P-4)から Hölder の不等式より,

$$|f_p(\theta)-f_p(re^{i\theta})|^p \leq \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)|f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda)|^p d\lambda.$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_p(\theta)-f_p(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)|f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda)|^p d\theta\, d\lambda.$$

ところがよく知られているように関数

$$g(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}|f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda)|^p d\theta$$

は連続関数で $g(0)=0$。故に (P-3) (P-4) より

$$\lim_{r\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)|f_p(\theta)-f_p(\theta-\lambda)|^p d\theta\, d\lambda = 0.$$

従って $f_p(re^{i\theta})$ は $r\uparrow 1$ のとき $L^p[d\lambda]$ でコーシー列をなす。

($\Leftarrow$) を証明しよう. $f(z)$ は単位円内で調和関数だから

$r<R<1$ に対して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta-\lambda)f(Re^{i\lambda})d\lambda$$

とかける。ところが $P_{r/R}(\theta-\lambda)$ は $R\uparrow 1$ のとき一様に $P_r(\theta-\lambda)$ に

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

収束し，仮定 (ii) より $L^p[d\lambda]$ に属する関数 $f_p(\lambda)$ が存在して

$\lim_{R\uparrow 1} f(Re^{i\lambda}) = f_p(\lambda)$ in $L^p[d\lambda]$. 故に

$$\lim_{R\uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta-\lambda) f(Re^{i\lambda}) d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda) d\lambda .$$

(q.e.d.)

定理 2.2.

$f(z) \in S[d\mu]$

$\Longleftrightarrow$ (i) $f(z)$ は単位円内で調和.

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})| d\lambda \leq c(f) < +\infty$

($c(f)$ は $0 \leq r < 1$ に無関係な定数).

証明. ($\Rightarrow$) の証明. (P-6) より

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) d\mu(\lambda)$$

は $|z|<1$ で調和. さらに (P-4) より

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) d|\mu(\lambda)| d\theta$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu(\lambda)| .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

($\Leftarrow$) の証明.

$$F_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(re^{i\lambda})d\lambda$$

とおく. 条件より任意の分割 $-\pi \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n = \pi$ に対し

$$\sum_{j=1}^{n} |F_r(a_j) - F_r(a_{j-1})| \leq \int_{-\pi}^{\theta} |f(re^{i\lambda})| d\lambda$$

$$\leq c(f) < +\infty .$$

すなわち $0 \leq r < 1$ で $F_r(\theta)$ の variation が有界である. 従って有限測度 $d\mu$ と部分列 $r_k \uparrow 1$ が存在して, $[-\pi, \pi]$ 上の任意の連続関数 $g(\lambda)$ に対し

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dF_{r_k}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\mu(\lambda) .$$

ところで $f(z)$ は単位円内で調和だから $r < r_k$ に対し

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/r_k}(\theta - \lambda) dF_{r_k}(\lambda)$$

とかける. $P_{r/r_k}(\theta - \lambda)$ は $r_k \uparrow 1$ のとき一様に $P_r(\theta - \lambda)$ に収束するから

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} P_{r/r_k}(\theta - \lambda) dF_{r_k}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \lambda) d\mu(\lambda) .$$

(q.e.d.)

<u>系</u>. 上の定理の有限測度 $d\mu$ が非負な測度

$\Longleftrightarrow$ 任意の $0 \leq r < 1$ と θ に対して

$f(re^{i\theta}) \geq 0$.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. ($\Rightarrow$) は (P-3) より明らか。

($\Leftarrow$) の証明.

$$F_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(re^{i\lambda})d\lambda$$

は条件より θ に関して非減少, すなわち $dF_r(\lambda)$ は非負な測度だから $d\mu(\lambda)$, も非負な測度。

定理 2.3. $f(z) \in S[1, d\lambda]$

$\Longleftrightarrow$ (i) $f(z)$ は単位円内で調和

(ii) $\int_{-\pi}^{\theta} f(re^{i\lambda})d\lambda = F_r(\theta)$ が $0 \leq r < 1$ で θ の関数として一様に絶対連続。

証明. ($\Rightarrow$) の証明. $f_1(\lambda) \in L^1[d\lambda]$ が存在して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda) f_1(\theta-\lambda)d\lambda$$

と表わされるから, (P-6) より $f(z)$ は $|z|<1$ で調和で $|A|<\delta$ なるボレル集合に対して ($|A|$ は A のルベーグ測度)

$$\int_A |f(re^{i\theta})|d\theta \leq \int_A \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\lambda)|f_1(\theta-\lambda)|d\lambda d\theta$$

$$\leq \sup_{|A|<\delta} \int_A |f_1(\theta)|d\theta .$$

故に $F_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(re^{i\lambda})d\lambda$ は $0 \leq r < 1$ で一様に絶対連続.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

($\Leftarrow$) の証明. $F_r(\theta)$ は一様に絶対連続だから, 特に

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})| d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} d|F_r(\lambda)|$$

は r について有界. 従って, 定理 2.2 より $f(z) \in S[d\mu]$. $dF_r(\lambda)$ が一様に絶対連続だから $d\mu(\lambda)$ は絶対連続. $d\mu(\lambda) = f_1(\lambda) d\lambda$ とおくと $f_1(\lambda) \in L^1[d\lambda]$ で

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_1(\lambda) d\lambda.$$

(q.e.d.)

<u>定理 2.4.</u> $p > 1$ のとき ($p = 1$ のときは成立しない.)

$f(z) \in S[p, d\lambda]$

$\Longleftrightarrow$ (i) $f(z)$ は単位円内で調和

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq c(f) < +\infty$

($c(f)$ は r に無関係な定数).

<u>証明.</u> ($\Rightarrow$) の証明. $f_p(\lambda) \in L^p[d\lambda]$ が存在して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda) d\lambda$$

とかけるから

$$|f(re^{i\theta})|^p \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) |f_p(\lambda)| d\lambda\right)^p.$$

Hölder の不等式より

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,|f_p(\lambda)|^p d\lambda .$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,|f_p(\lambda)|^p d\lambda\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f_p(\lambda)|^p d\lambda \equiv c(\lambda) < +\infty .$$

($\Leftarrow$) の証明. Hölder の不等式より

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|\,d\lambda\right)^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq c(f).$$

故に $f(z)$ は定理2.2の条件 (i), (ii) を満たすから $f(z) \in S[d\mu]$。

次に

$$f_1(r,\lambda) = |f(re^{i\lambda})|, \quad |f(re^{i\lambda})| \leq M^{1/(p-1)} \text{ のとき}$$

$$= 0 \qquad \text{他の場合}$$

$$f_2(r,\lambda) = |f(re^{i\lambda})| - f_1(r,\lambda)$$

とおくと 任意のボレル集合 A に対して

$$\left|\int_A f(re^{i\lambda})\,d\lambda\right| \leq \int_A f_1(r,\lambda)\,d\lambda + \int_A |f_2(r,\lambda)|\,d\lambda$$

$$\leq M^{1/(p-1)}|A| + M^{-1}\int_A |f_2(r,\lambda)|^p d\lambda ,$$

($u \geq M^{1/(p-1)}$ ならば $u^p \geq uM$)

$$\leq M^{1/(p-1)}|A| + M^{-1} c(f) .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

従って，M を十分大きくとってから $|A|$ を十分小さくとれば $F_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} f(re^{i\lambda})d\lambda$ は一様に絶対連続であることがわかる．故に定理 2.3 より $d\mu(\lambda) = f_p(\lambda)d\lambda$ とかけて，ある部分列 $r_k \uparrow 1$ に対して $f(r_k e^{i\lambda})$ は $f_p(\lambda)$ に弱収束する。従ってさらに部分列 $t_k \uparrow 1$ が存在して $f(t_k e^{i\lambda})$ は $f_p(\lambda)$ に概収束する．故に Fatou の lemma より

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_p(\lambda)|^p d\lambda \leq \varliminf_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t_k e^{i\lambda})|^p d\lambda$$
$$\leq c(f).$$

故に $f_p(\lambda) \in L^p[d\lambda]$． (q.e.d.)

<u>注意.</u> 定理 2.1より $f(z) \in S[p, d\lambda]$ ならば

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^p d\lambda = \|f\|_p^p$$

とおくと，$S[p, d\lambda]$ はノルム $\|\cdot\|_p$ によってバナッハ空間となり

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \lambda) f_p(\lambda) d\lambda$$

と表わすとき，対応 $S[p, d\lambda] \ni f \longrightarrow f_p \in L^p[d\lambda]$ は onto isometric となる。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

§3. 単位円内の H^p 空間

$p \geq 1$ に対して

$$H^p = \left\{ f(z);\ |z|<1 \text{ で解析的で } \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq c(f) < +\infty \right\}$$

$$L_+^p[d\lambda] = \left\{ f(\lambda) \in L^p[d\lambda];\ \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{in\lambda} d\lambda = 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

とおく。明らかに $H^p \supset H^q$, $L_+^p[d\lambda] \supset L_+^q[d\lambda]$ $(p<q)$.

<u>定理3.1.</u>

$f(z) \in H^p$

$\Longleftrightarrow$ $f_p(\lambda) \in L_+^p[d\lambda]$ が存在して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda) d\lambda$$

とかける.

<u>注意.</u> $H^p \subset S[p, d\lambda]$ となるから $S[p, d\lambda]$ のノルムで上の対応は H^p から $L_+^p[d\lambda]$ への onto isometric な対応を与える.

<u>証明.</u> まず $p>1$ の場合を証明する. $p=1$ の場合は後で述べる F. and M. Riesz の定理を必要とするので, 定理3.3 の証明の後で証明する.

$(\Rightarrow)$ の証明. $f(z) \in H^p$ は $|z|<1$ で調和でもあるから, 定理2.4 によって $f_p(\lambda) \in L^p[d\lambda]$ が一意に存在して

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda)\, d\lambda$$

とかける。さらに $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的だから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

とかける. 右辺は $|z|<1$ で広義一様収束だから, $k=1,2,\cdots$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\lambda}) e^{ik\lambda} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k)\lambda} d\lambda = 0.$$

定理 2.1 より $\lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\lambda}) = f_p(\lambda)$ in $L^p[d\lambda]$ だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda = 0, \quad k=1,2,\cdots.$$

($\Leftarrow$) の証明. (P-7) より

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f_p(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n + ib_n) e^{-in\theta} r^n + (a_n - ib_n) e^{in\theta} r^n \right\}.$$

ところが仮定より

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f_p(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad n=1,2,\cdots.$$

故に

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

従って $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的. $f(z) \in S[p, d\lambda]$ だから定理2.4 によって

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq c(f) < +\infty .$$

故に $f(z) \in H^p$. $p>1$ のときが証明された.

<u>系.</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $|z|<1$ で解析的とする.

$$f(z) \in H^2 \iff \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty .$$

<u>証明.</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\lambda})|^2 d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$$

より明らか. (q.e.d.)

次に F. and M. Riesz の定理を証明するために3つの補題と1つの定理を準備する. そのために次の記号を導入する.

$$A = \{ f(z) ;\ |z|<1 \text{ で解析的で } |z| \leq 1 \text{ で連続} \}$$

$$B = \{ g(\lambda) ;\ \text{円周 } \{e^{i\lambda} ;\ -\pi \leq \lambda \leq \pi\} \text{ 上で連続で}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) e^{in\lambda} d\lambda = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \} .$$

A, B はそれぞれノルム $\|f\|_\infty = \sup_{|z|\leq 1} |f(z)| = \sup_{\lambda} |f(e^{i\lambda})|$, $\|g\|_\infty = \sup_{\lambda} |g(\lambda)|$ によってバナッハ空間となる.

<u>補題 3.1.</u> $f(z) \in A$ に対し対応

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$g(\lambda) = f(e^{i\lambda}) \in B$$

は onto isometric.

証明. $f(z)$ はもちろん $|z|<1$ で調和かつ $|z|\leq 1$ で連続だから

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) f(e^{i\lambda}) d\lambda$$

とかける。定理3.1より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda}) e^{in\lambda} d\lambda = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

従って $g(\lambda) = f(e^{i\lambda}) \in B$. 逆に $g(\lambda) \in B$ に対して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) g(\lambda) d\lambda$$

とおくとやはり定理3.1によって $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的で, $g(\lambda)$ の連続性から $|z|\leq 1$ で連続. (q.e.d.)

補題3.2. $\left\{ p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\lambda},\ a_k \text{ 複素数} \right\}$ の全体は B で dense.

証明. $g(\lambda) \in B$ とする.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda$$

$$S_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}, \quad (c_k = 0,\ k = -1, -2, \cdots)$$

$$\sigma_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(\theta)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

とおく。

簡単な計算によって

$$\sigma_n(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\lambda) K_n(\lambda)\, d\lambda$$

$$K_n(\lambda) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+1/2)\theta}{2\sin\theta/2} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\theta(n+1)/2}{\sin\theta/2}\right)^2.$$

$K_n(\lambda)$ は定理1.1の (P-3) (P-4) (P-5) の性質を満たし, $g(\lambda)$ は円周上で一様連続だから任意の ε に対して δ を十分小さくとると

$$\begin{aligned}|\sigma_n(\theta) - g(\theta)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta-\lambda) - g(\theta)|\, K_n(\lambda)\, d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|<\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|\geq\delta} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{2}{\pi}\|g\|_\infty \int_{|\lambda|\geq\delta} K_n(\lambda)\, d\lambda \\ &\longrightarrow \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (n\to+\infty).\end{aligned}$$

(q.e.d.)

<u>補題3.3.</u> $d\mu$ を有限実数値測度とする.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\Longleftrightarrow d\mu(\lambda) = c\, d\lambda.$$

<u>証明.</u> ($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) の証明.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

[第一段] まず任意の $f(z) \in A$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\,d\mu(\lambda) = 0 \implies d\mu(\lambda) = 0$$

を示す.

$g(\lambda)$ を単位円周上の任意の実数値連続関数とする. c_k, $S_n(\theta)$, $\sigma_n(\theta)$ を補題 3.2 の証明中のものと同じに定義すると今の場合 $c_k = \overline{c_{-k}}$ だから $c_k = a_k + i b_k$ (a_k, b_k は実数値) とおくと

$$S_n(\theta) = 2\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos\theta k - b_k \sin\theta k)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n} c_k e^{i\theta k}$$

$$S_n^*(\theta) = 2\sum_{k=0}^{n} c_k e^{i\theta k}$$

$$\sigma_n^*(\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} S_k^*(\theta)$$

とおくと $\sigma_n^*(\theta) \in B$ で補題 3.2 の証明と同様にして θ について一様に $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,\sigma_n^*(\theta) = g(\theta)$。 仮定から

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^*(\lambda)\,d\mu(\lambda) = 0.$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\,d\mu(\lambda) = 0.$$

従って

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$d\mu(\lambda)=0.$$

[第二段]

$$2\pi m=\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\lambda),\quad d\mu_1(\lambda)=d\mu(\lambda)-m\,d\lambda$$

とおく. $f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k\in A$ に対して.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\lambda})d\mu_1(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(e^{i\lambda})-f(0))d\mu_1(\lambda)+\int_{-\pi}^{\pi}f(0)\,d\mu_1(\lambda)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k e^{ik\lambda}d\mu(\lambda)-m\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k e^{ik\lambda}d\lambda+f(0)\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\lambda)-m\int_{-\pi}^{\pi}d\lambda\right)$$

$$=0.$$

補題 3.1 と補題 3.2 からこのような $f(z)$ は A で dense。故に任意の $f(z)\in A$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\lambda})\,d\mu_1(\lambda)=0.$$

よって第一段から $d\mu_1(\lambda)=0$ すなわち $d\mu(\lambda)=m\,d\lambda$.

(q.e.d.)

$d\mu(\lambda)$ を $[-\pi,\pi)$ 上の非負有限測度とするとき,

$$L^2[d\mu]=\left\{f(\lambda)\text{ ボレル可測関数};\ \int_{-\pi}^{\pi}|f(\lambda)|^2d\mu(\lambda)<+\infty\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$A_0 = \{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ik\lambda},\ a_k$ 複素数$\}$の全体からなる線型空間

$\overline{A_0} = L^2[d\mu]$ の中での A_0 の閉包.

$P_{\overline{A_0}} 1 = F$ （$L^2[d\mu]$ の中での $\overline{A_0}$ への射影）

とおく。

<u>定理 3.2.</u> $\overline{A_0} \neq 1$ を仮定する.

(i) $|1-F(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = c\,d\lambda, \quad (c>0)$

(ii) $(1-F(\lambda))^{-1} \in L^2_+[d\lambda]$

(iii) $d\mu(\lambda) = h(\lambda)d\lambda + d\mu_s(\lambda)$, $d\mu_s(\lambda)$ は特異な測度

とおくと, $(1-F(\lambda))h(\lambda) \in L^2[d\lambda]$。

<u>証明.</u> (i) F の定義から $(1-F(\lambda))$ は $\overline{A_0}$ と直交している.

一方任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して $(1-F(\lambda))f(\lambda)$ は $(1-F(\lambda))$ と直交している。実際 $\lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda) = F(\lambda)$ in $L^2[d\mu]$ となる $f_n(\lambda) \in A_0$ が存在して A_0 の定義から $f(\lambda)(1-f_n(\lambda)) \in A_0$ で $\lim_{n\to+\infty} f(\lambda)(1-f_n(\lambda))$ $= f(\lambda)(1-F(\lambda))$ in $L^2[d\mu]$. 従って $f(\lambda)(1-F(\lambda)) \in \overline{A_0}$ だから. すなわち任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\,|1-F(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = 0.$$

従って, 補題 3.3 から $|1-F(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = k\,d\lambda$。仮定から $F \neq 1$ in

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$L^2[d\mu]$ だから $k \neq 0$.

(ii) $d\mu = d\mu_a + d\mu_s$ (ルベーグ測度に関して絶対連続な部分+特異部分) と分解すると (i) より

$$d\mu_a(\lambda) = |1-F(\lambda)|^{-2} k\, d\lambda.$$

従って $(1-F(\lambda))^{-1} \in L^2[d\lambda]$. 一方 $(1-F(\lambda))$ は $L^2[d\mu]$ で A_0 と直交しているから, 任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して

$$k \int_{-\pi}^{\pi} (1-F(\lambda))^{-1} f(\lambda)\, d\lambda = k \int_{-\pi}^{\pi} (1-\overline{F}(\lambda)) f(\lambda) |1-F(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1-\overline{F}(\lambda)) f(\lambda)\, d\mu(\lambda) = 0.$$

従って $f(\lambda) = e^{in\lambda}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ とすれば定理3.1より $(1-F(\lambda))^{-1} \in L^2_+[d\lambda]$.

(iii) $d\mu_a(\lambda) = h(\lambda)\, d\lambda$ とおくと (i) より $|1-F(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = |1-F(\lambda)|^2 h(\lambda)\, d\lambda = k\, d\lambda$. 従って $|1-F(\lambda)|\, h(\lambda) = k\, |1-F(\lambda)|^{-1}$ (a.e. $d\lambda$). 故に (ii) より $(1-F(\lambda)) h(\lambda) \in L^2[d\lambda]$.

<u>定理3.3</u> (F. and M. Riesz). $d\mu(\lambda)$ を有限測度とする.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\Longrightarrow \ d\mu(\lambda) = h(\lambda)\, d\lambda \quad (h(\lambda) \in L^1[d\lambda]).$$

<u>証明.</u> $d\mu(\lambda) = h(\lambda)\, d\lambda + d\mu_s(\lambda)$ と分解する.

[第一段] 定理の仮定は任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\mu(\lambda) = 0$ を意味するが，さらに $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) h(\lambda) d\lambda = 0$ が成りたつことを示す.

$$d\rho(\lambda) = (1+|h(\lambda)|)d\lambda + d|\mu_s|(\lambda)$$

とおくと $f(\lambda) \in A_0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} |1-f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \geq \int_{-\pi}^{\pi} |1-f(\lambda)|^2 d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1+|f(\lambda)|^2 - f(\lambda) - \bar{f}(\lambda)) d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1+|f(\lambda)|^2) d\lambda \geq 2\pi .$$

$F(\lambda)$ を $L^2[d\rho]$ の中での 1 の $\overline{A}_0$ への射影とすると上のことより $F \neq 1$ in $L^2[d\rho]$。従って $g(\lambda) \in A_0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1-F(\lambda)) g(\lambda) d\rho(\lambda) = 0 .$$

定義から $\lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda) = F(\lambda)$ in $L^2[d\rho]$ となる $f_n(\lambda) \in A_0$ が存在する. $d\mu(\lambda)/d\rho(\lambda)$ は有界だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1-F(\lambda)) g(\lambda) d\mu(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (1-f_n(\lambda)) g(\lambda) d\mu(\lambda) .$$

$(1-f_n(\lambda)) g(\lambda) \in A_0$ だから仮定から

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1-F(\lambda)) g(\lambda) d\mu(\lambda) = 0 .$$

定理 3.2 の (i) から $(1-F(\lambda)) = 0$ a.e. $d|\mu_s|(\lambda)$ だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1-F(\lambda)) g(\lambda) h(\lambda) d\lambda = 0 .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

この式と定理3.2の(iii)から $(1-F(\lambda))h(\lambda) \in L^2_+[d\lambda]$．さらに，補題3.1と定理3.2の(ii)から単位円内で解析的で $|z|=1$ 上で連続な関数列 $\{g_n\}$ が存在して $\lim_{n\to+\infty} g_n(e^{i\lambda}) = (1-F(\lambda))^{-1}$ in $L^2[d\lambda]$．H^2 の中で考えると $f_1(z), f_2(z) \in H^2$ かつ $f_1(e^{i\lambda})$ が連続関数ならば $f_1(z)f_2(z) \in H^2$ だから $g_n(e^{i\lambda})(1-F(\lambda))h(\lambda) \in L^2_+[d\lambda]$．従って定理3.1から任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g_n(e^{i\lambda})(1-F(\lambda))h(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

$n \to +\infty$ として

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)h(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

従って，もちろん任意の $f(\lambda) \in A_0$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\,d\mu_s(\lambda) = 0.$$

［第二段］ $L^2[d|\mu_s|]$ の中における A_0 の閉包が 1 を含まないとすれば 1 の $\overline{A}_0$ への射影を F とすると定理3.2により $(1-F(\lambda))\,d|\mu_s|(\lambda) = h\,d\lambda$，$h \neq 0$ の形に表わされて矛盾．従って $\overline{A}_0 \ni 1$．故に $f_n(\lambda) \in A_0$ が存在して $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = 1$ in $L^2[d|\mu_s|]$．従って，第一段と合わせて

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda)\,d\mu_s(\lambda) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} d\mu_s(\lambda) = 0 \quad (n \to +\infty).$$

故に，第一段と合わせると $e^{-i\lambda}d\mu_s(\lambda)$ は A_0 と直交しているから上と

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

同じ手順で

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda} d\mu_s(\lambda) = 0.$$

以下同様にして $n = 2, 3, \cdots$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} d\mu_s(\lambda) = 0.$$

第一段と合わせて $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu_s(\lambda) = 0.$$

従って, $d\mu_s(\lambda) = 0$. (q.e.d.)

定理3.1. $p=1$ の場合の証明.

定理2.2より $H^1 \ni f(z)$ に対して有限測度 $d\mu(\lambda)$ が存在して

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda) d\mu(\lambda)$$

とかける. $f(z)$ が $|z|<1$ で解析的だから $n=1, 2, \cdots$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\lambda}) e^{in\lambda} d\lambda = 0.$$

定理2.2の証明にあるように $\lim_{r_k \uparrow 1} f(r_k e^{i\lambda}) d\lambda = d\mu(\lambda)$ (弱) だから

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} d\mu(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

故に定理3.3より $d\mu(\lambda) = f_1(\lambda) d\lambda$, $f_1(\lambda) \in L_+^1[d\lambda]$. 逆の証明は $p>1$ の場合と全く同様. (q.e.d.)

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理3.4 (Szegö; Kolmogoroff-Krein). $d\mu(\lambda)$ を正の有限測度とする. $d\mu(\lambda)=h(\lambda)d\lambda+d\mu_s(\lambda)$ とおくとき

$$\inf_{f\in A_0}\int_{-\pi}^{\pi}|1-f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right].$$

ただし, ルベーグ測度正の集合上で $h(\lambda)=0$ のときは $\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda=-\infty$ と理解する. すなわち 右辺$=0$. $\log h(\lambda)\leq h(\lambda)$ だから, $-\infty\leq\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda<+\infty$ である.

証明. [第一段]. まず

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right]=\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[\mathrm{Re}\, f(\lambda)]d\lambda$$

を示す. 左辺は定理3.4の但し書のように理解する.

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n}\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

より $\log h(\lambda)$ が可積分であると否とにかかわらず

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right]\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)d\lambda.$$

$\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)d\lambda=0$ なる実関数 $g(\lambda)\in L^1[d\lambda]$ に対して上の式の $h(\lambda)$ の代りに $h(\lambda)\exp[g(\lambda)]$ を代入すると

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right]\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[g(\lambda)]d\lambda.$$

$f(\lambda)\in A_0$ に対して $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\, f(\lambda)d\lambda=0$ だから

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right] \leq \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[\mathrm{Re}f(\lambda)]d\lambda .$$

次に $\log h(\lambda)$ が可積分のとき逆の不等式を示す。

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda - \log h(\lambda)$$

とおくと，明らかに $\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)d\lambda = 0$，かつ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[g(\lambda)]d\lambda = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right].$$

ところが $L^1[d\lambda] \ni g(\lambda)$（実数値関数）で $\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)d\lambda = 0$ ならば $g(\lambda)$ は周期的な連続関数 $\hat{g}(\lambda)$ で $L^1[d\lambda]$ の意味で近似できる．さらに $\hat{g}(\lambda)$ は $\mathrm{Re}f$，$f\in A_0$ によって一様に近似できる．結局 $f_n \in A_0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[\mathrm{Re}f_n(\lambda)]d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[g(\lambda)]d\lambda$$

とできる．従って

$$\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[\mathrm{Re}f(\lambda)]d\lambda \leq \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right].$$

$\log h(\lambda)$ が可積分でないときは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\log(h(\lambda)+\varepsilon)$ は可積分だから

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(h(\lambda)+\varepsilon)d\lambda\right] = \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(\lambda)+\varepsilon)\exp[\mathrm{Re}f(\lambda)]d\lambda.$$

$\varepsilon\to 0$ とすれば 左辺 $\to 0$．よって右辺 $\to 0$．容易に $\varepsilon\to 0$ のとき右辺 $\to$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[\mathrm{Re}\,f(\lambda)]d\lambda.$$

従って結論を得る。

［第二段］。第一段で証明した式に $f(\lambda)=2g(\lambda)\in A_0$ を代入すると

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right]=\inf_{g\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)\exp[2\mathrm{Re}\,g(\lambda)]d\lambda.$$

$\exp[2\mathrm{Re}\,g(\lambda)]=|\exp[g(\lambda)]|^2$ で，$1-\exp[g(\lambda)]$ は A_0 の関数で一様に近似できるから

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)d\lambda\right]\geq\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-f(\lambda)|^2h(\lambda)d\lambda.$$

もともとこの式は $h(\lambda)$ が非負可積分関数であればよかったから，$g\in A_0$ に対して $h(\lambda)$ の代りに $|1-g(\lambda)|^2$ を代入すると

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|1-g(\lambda)|^2d\lambda\right]\geq\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-f(\lambda)|^2|1-g(\lambda)|^2d\lambda$$

$$=\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-f(\lambda)-g(\lambda)+f(\lambda)g(\lambda))(1-\bar f(\lambda)-\bar g(\lambda)+\bar f(\lambda)\bar g(\lambda))d\lambda$$

$$=\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+|f(\lambda)+g(\lambda)-f(\lambda)g(\lambda)|^2)d\lambda$$

$$\geq 1.$$

従って

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|1-g(\lambda)|^2d\lambda\geq 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで

$$|1-g(\lambda)|^2 = k\, exp[p(\lambda)], \quad k = exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log|1-g(\lambda)|^2 d\lambda\right]$$

とおくと $\int_{-\pi}^{\pi} p(\lambda)d\lambda = 0$, $k \geq 1$ だから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-g(\lambda)|^2 h(\lambda)d\lambda = \frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\, exp[p(\lambda)]\, d\lambda$$

$$\geq \inf_{f\in A_0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\, exp\,[\mathrm{Re}\, f(\lambda)]\, d\lambda$$

$$= exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log\, h(\lambda)\, d\lambda\right].$$

従って,

$$exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log\, h(\lambda)d\lambda\right] = \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-f(\lambda)|^2 h(\lambda)d\lambda.$$

後は, 定理 3.3 の証明の第二段に示したように A_0 の $L^2[d\mu_s]$ による閉包は 1 を含むことより結論を得る. (q.e.d.)

<u>定理 3.5.</u> $f(z) \in H^1$ かつ $f(z) \not\equiv 0$ とする. $f(z)$ が原点で n 位の 0 点をもつとする. $f(z) = z^n g(z)$ とおくとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log|f(e^{i\lambda})|d\lambda \geq log|g(0)| \quad (> -\infty).$$

ただし $f(e^{i\lambda})$ は定理 3.1 の対応によって $f(e^{i\lambda}) = f_1(\lambda)$ と理解する.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. $f(0)\neq 0$ かつ $f(z)\in H^2$ のときに証明する. 定理3.4で $h(\lambda)=|f(e^{i\lambda})|^2$ を代入して

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{i\lambda})|^2 d\lambda\right]=\inf_{g\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-g(\lambda)|^2|f(e^{i\lambda})|^2 d\lambda.$$

$$f(re^{i\lambda}) = f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n e^{in\lambda}$$

$$= f(0)+p(r,\lambda)$$

とおくとき $g(\lambda)\in A_0$ ならば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-g(\lambda)|^2|f(re^{i\lambda})|^2 d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(0)-g(\lambda)f(0)+p(r,\lambda)+g(\lambda)p(r,\lambda)|^2 d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(|f(0)|^2+|g(\lambda)f(0)-p(r,\lambda)-g(\lambda)p(r,\lambda)|^2\right)d\lambda$$

$$\geq |f(0)|^2.$$

定理2.1より $\lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\lambda})=f(e^{i\lambda})$ in $L^2[d\lambda]$ だから結局,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{i\lambda})|d\lambda\geq\log|f(0)|.$$

$f(z)\notin H^2$ のとき $f_n(z)\in H^2$ が存在して $f_n(0)=f(0)$ かつ $f_n(z)\to f(z)$ in H^1 とできるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(|f_n(e^{i\lambda})|+\varepsilon)d\lambda\geq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f_n(e^{i\lambda})|d\lambda$$

$$\geq\log|f(0)|.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$\log(|f_n(e^{i\lambda})|+\varepsilon) \to \log(|f(e^{i\lambda})|+\varepsilon)$ in $L^1[d\lambda]$ だから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(e^{i\lambda})|+\varepsilon)d\lambda \geq \log|f(0)|.$$

従って，$\varepsilon\downarrow 0$ として

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{i\lambda})|d\lambda \geq \log|f(0)|.$$

$f(0)$ が n 位の 0 点をもつとき，$f(z)=z^n g(z)$ とおくと，定理3.1 から明らかに $g(z)\in H^1$ かつ $g(0)\neq 0$．しかも $|f(e^{i\lambda})|=|g(e^{i\lambda})|$ (a.e. $d\lambda$)．従って結論を得る． (q.e.d.)

系. $L_+^p[d\lambda]\ni f(\lambda)$ $(p\geq 1)$ は $f(\lambda)\equiv 0$ (a.e. $d\lambda$) または $f(\lambda)\neq 0$ (a.e. $d\lambda$).

証明. 定理から明らか。 (q.e.d.)

定理 3.6. $H^1\ni f(z)$

$$\Longleftrightarrow \quad f(z)=f_1(z)f_2(z), \quad f_i(z)\in H^2.$$

証明. $(\Leftarrow)$ の証明は $2|f_1(z)f_2(z)|\leq |f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2$ と H^p の定義より明らか。

$(\Rightarrow)$ の証明．定理3.5 より $\log|f(e^{i\lambda})|\in L^1[d\lambda]$．従って $d\mu(\lambda)=|f(e^{i\lambda})|d\lambda$ とおくと，定理 3.4 より 1 は $L^2[d\mu]$ の中での A_0 の閉包 $\overline{A_0}$ に含まれない．従って，定理 3.2 (i) より，$|f(e^{i\lambda})| = c|1-F(\lambda)|^{-2}$，$c\neq 0$ (a.e. $d\lambda$)。同定理 (ii) より $(1-F(\lambda))^{-1}\in$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$L^2_+[d\lambda]$．すなわち 定理3.1 より $f_1(z)\in H^2$ が存在して $f_1(e^{i\lambda})$ $=(1-F(\lambda))^{-1}$．さらに同定理 (iii) より $(1-F(\lambda))f(e^{i\lambda})\in L^2[d\lambda]$．

$F(\lambda)$ の定義から $g_n\in A_0$ が存在して $\lim_{n\to\infty} g_n(\lambda)=F(\lambda)$ in $L^2[d\mu]$．

故に $k\geq 1$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1-F(\lambda))f(e^{i\lambda})e^{ik\lambda}d\lambda$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(1-g_n(\lambda))f(e^{i\lambda})e^{ik\lambda}d\lambda$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{ik\lambda}-e^{ik\lambda}g_n(\lambda))f(e^{i\lambda})d\lambda$$

$=0$ （$f(z)\in H^1$ すなわち $f(e^{i\lambda})\in L^1_+[d\lambda]$ だから）．

従って定理 3.1 から $(1-F(\lambda))f(e^{i\lambda})\in L^2_+[d\lambda]$．故に定理3.1 によって $(1-F(\lambda))f(e^{i\lambda})$ に対応する H^2 の元を $f_2(z)$ とおくと $(1-F(\lambda))f(e^{i\lambda})\cdot(1-F(\lambda))^{-1}=f(e^{i\lambda})$ だから $f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)$ （定理 3.1 の対応が関数の積と可換なことは §1 の (P-4), (P-5) の性質によって $f(re^{i\lambda})\longrightarrow f_p(\lambda)$ $(r\uparrow 1)$ (a.e. $d\lambda$) より導かれる．

<u>定理3.7.</u> $h(\lambda)\in L^1[d\lambda]$ かつ $h(\lambda)\geq 0$ とする．

$h(\lambda)=|f_p(\lambda)|^p$ $(f_p(\lambda)\in L^p_+[d\lambda])$

すなわち $h(\lambda)=|f(e^{i\lambda})|^p$ $(f(z)\in H^p)$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)\,d\lambda>-\infty.$$

<u>証明</u>． (⇒) は定理 3.5 より明らか。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

($\Leftarrow$) の証明.

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi p}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\cdot\log h(\lambda)d\lambda\right]$$

とおくと, 明らかに $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的. かつ

$$|f(re^{i\theta})|^p = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\,\frac{1+re^{i(\theta-\lambda)}}{1-re^{i(\theta-\lambda)}}\log h(\lambda)d\lambda\right]$$

$$= \exp\left[\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-\lambda)\log h(\lambda)d\lambda\right].$$

Jensen の不等式より

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-\lambda)h(\lambda)d\lambda.$$

従って

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-\lambda)h(\lambda)d\lambda\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)d\lambda.$$

従って $f(z)\in H^p$. さらに (P-4), (P-5) によって

$$\lim_{r\uparrow 1}|f(re^{i\lambda})|^p = h(\lambda) \quad (a.e.\ d\lambda).$$

一方 定理 3.1 から $f_p(\lambda)\in L_+^p[d\lambda]$ によって

$$f(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-\lambda)f_p(\lambda)d\lambda$$

と表わされるから

$$\lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\lambda}) = f_p(\lambda) \quad (a.e.\ d\lambda).$$

従って

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$h(\lambda) = |f_p(\lambda)|^p \quad (a.e.\ d\lambda).$$

§4. Outer function と inner function

この§では，H^1-空間のさらにくわしい解析，すなわち H^1 の元が outer function と inner function の積に分解され，inner function はさらに Blaschke product と singular function の積に分解されることを述べる．

定義4.1. $F(z)$ $(|z|<1)$ が outer function

$$\Longleftrightarrow\ F(z) = a \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, h(\lambda)\, d\lambda\right].$$

ここで $h(\lambda) \in L^1[d\lambda]$ 実数値関数，$|a| = 1$ となる複素数．

定理4.1. Outer function $F(z)$ の性質

(i) $F(z)$ は $|z|<1$ で解析的

(ii) $\lim_{r\uparrow 1} |F(re^{i\lambda})| = \exp[h(\lambda)] \quad (a.e.\ d\lambda)$

(iii) $F(z) \in H^p \Longleftrightarrow \exp[h(\lambda)] \in L^p[d\lambda]$.

証明. (i) $|z|<1$ のある近傍で $e^{i\lambda}-z$ は絶対値がある正の数より小さくならないことより明らか．

(ii) $|F(re^{i\lambda})| = \exp\left[\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\, h(\theta)\, d\theta\right]$.

故に §1 の (P-4)，(P-5) より

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\lim_{r\uparrow 1} |F(re^{i\lambda})| = \exp[k(\lambda)] \quad (a.e.\ d\lambda).$$

(iii) ($\Leftarrow$) の証明. Jensen の不等式より

$$\exp\left[p\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)k(\lambda)d\lambda\right] \le \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\exp[pk(\lambda)]d\lambda.$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\exp[pk(\lambda)]d\lambda d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \exp[pk(\lambda)]d\lambda.$$

故に (i) と合わせて $F(z) \in H^p$.

($\Rightarrow$) の証明. 定理2.1と定理3.1より $F(re^{i\lambda})$ は $r\uparrow 1$ のとき $L^p[d\lambda]$ のコーシー列をなす。従って, 部分列は $L^p[d\lambda]$ のある関数 $f_p(\lambda)$ に概収束する。(ii) より $|f_p(\lambda)| = \exp[k(\lambda)]$ $(a.e.\ d\lambda)$. 従って $\exp[k(\lambda)] \in L^p[d\lambda]$. (q.e.d.)

<u>定義 4.2.</u> $g(z) \in H^1$ が inner function

$\Longleftrightarrow$ (i) $g(z)$ は $|z|<1$ で解析的

(ii) $\lim_{r\uparrow 1} |g(re^{i\lambda})| = 1$ $(a.e.\ d\lambda)$

(従って (i), (ii) と $g(z) \in H^1$ より $|z|<1$ で $|g(z)| \le 1$.)

<u>定理 4.2.</u> $f(z) \in H^p$, $f(z) \not\equiv 0$

$\Longleftrightarrow$ $f(z) = g(z)F(z)$.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで $g(z)$ は inner function, $F(z)$ は H^p に属する outer function. $g(z)$, $F(z)$ は modulus 1 の複素数を除いて一意に定まる.

<u>証明.</u> $(\Leftarrow)$ の証明. 定理 4.1 の (i) と定義 4.2 の (i) より $f(z)$ は $|z|<1$ で解析的. さらに定理 4.1 の (iii) の証明と定義 4.2 より

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq \int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\lambda})|^p d\lambda \leq \int_{-\pi}^{\pi} \exp[pk(\lambda)]\,d\lambda .$$

故に $f(z) \in H^p$.

$(\Rightarrow)$ の証明. 定理3.1 と定理3.5 より $f(z) \in H^p$ ならば $f(e^{i\lambda}) \in L^p[d\lambda]$ かつ $\log|f(e^{i\lambda})| \in L^1[d\lambda]$. 故に

$$F(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\log|f(e^{i\lambda})|\,d\lambda\right]$$

とおくと $F(z)$ は outer function で定理 4.1 から $F(z) \in H^p$. 明らかに $|z|<1$ で $F(z) \neq 0$ だから,

$$g(z) = \frac{f(z)}{F(z)} \quad \text{すなわち} \quad f(z) = g(z)F(z)$$

とおくと $g(z)$ は $|z|<1$ で解析的. さらに定理 4.1 の (ii) より $\lim_{r\uparrow 1}|F(re^{i\lambda})| = |f(e^{i\lambda})|$ (a.e. $d\lambda$). 故に $\lim_{r\uparrow 1}|g(z)| = 1$.

故に $g(z)$ は inner function.

$$g_1(z)F_1(z) = g_2(z)F_2(z) = f(z)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

と二通りに表現されたとすると

$$\lim_{r\uparrow 1}|F_1(re^{i\lambda})| = \lim_{r\uparrow 1}|F_2(re^{i\lambda})| = |f(e^{i\lambda})| \quad (a.e.d\lambda).$$

故に定理 4.1 より $F_1(z) = aF_2(z)$, $|a| = 1$. (q.e.d.)

次に H^p に属する outer function の characterization は次の定理によって与えられる。

<u>定理 4.3.</u> $F(z) \in H^p$ のとき 次の3つの命題は同値.

(i) $F(z)$ は outer function.

(ii) $f(z) \in H^p$ が $|f(e^{i\lambda})| = |F(e^{i\lambda})|$ (a.e.$d\lambda$) を満たすならば $|F(z)| \geq |f(z)|$ in $|z| < 1$.

(iii) $\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(e^{i\lambda})|d\lambda$.

<u>証明.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). $f(z)/F(z) = g(z)$ とおくと $F(z) \neq 0$ in $|z| < 1$ だから $g(z)$ は $|z| < 1$ で解析的, かつ

$$\lim_{r\uparrow 1}|g(re^{i\lambda})| = 1 \quad (a.e.d\lambda).$$

よって, 最大値の原理から $|g(z)| = 1$ in $|z| < 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

$$G(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\log|F(e^{i\lambda})|d\lambda\right]$$

とおくとき $G(z)$ は定義から outer function で定理 4.1 の (ii) より

$G(z) \in H^p$. (i) ⇒ (ii) を使って $|F(z)| \leq |G(z)|$ in $|z|<1$. 定理 4.1 の (ii) より $|G(e^{i\lambda})| = |F(e^{i\lambda})|$ $(a.e.\, d\lambda)$ だから仮定から $|G(z)| \leq |F(z)|$ in $|z|<1$. 従って $|G(z)| = |F(z)|$. その上 $G(z) \neq 0$ だから $F(z)/G(z)$ は $|z|<1$ で解析的。故に $F(z) = aG(z)$, $|a|=1$, すなわち $F(z)$ は outer function.

(i) ⇒ (iii).

$$F(0) = a \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(e^{i\lambda})|\,d\lambda\right].$$

故に

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|F(e^{i\lambda})|\,d\lambda.$$

(iii) ⇒ (i). 上で定義した $G(z)$ をとってくると $F(z)/G(z)$ は $|z|<1$ で解析的かつ $\lim_{r\uparrow 1} |F(re^{i\lambda})|/|G(re^{i\lambda})| = 1$ $(a.e.\, d\lambda)$ で, $G(z)$ は outer function だから (ii) より $|F(z)| \leq |G(z)|$ かつ (iii) より $|F(0)|/|G(0)| = 1$. 従って $F(z) = aG(z)$, $|a|=1$. すなわち, $F(z)$ は outer function. (q.e.d.)

<u>定義 4.3.</u> $|z|<1$ 上の関数 $B(z)$ が Blaschke product

$$\Longleftrightarrow B(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\cdot\frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z}\right].$$

ここで

(i) p は非負の整数.

(ii) $0 < |a_n| < 1$.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n| > 0$.

定理4.4. $B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \right] \quad (0 < |a_k| < 1)$

とおく。

(i) $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n| > 0$ すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < +\infty$ ならば $B_n(z)$ は $|z| < 1$ で広義一様収束。

(ii) (i)の条件が満たされているとき $B(z) = \lim_{n \to +\infty} B_n(z)$ は inner function でその0点はちょうど $a_1, a_2, \cdots$ (重複度も含めて)。

証明.
$$b_k(z) = \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}$$

とおく。

$$|b_k(e^{i\lambda})| = \left| \frac{e^{-i\lambda} a_k - 1}{1 - \bar{a}_k e^{i\lambda}} \right| = 1.$$

故に $|B_n(z)| \leq 1, \quad |z| \leq 1$.

$|z| \leq r < 1$ のとき

$$|1 - b_k(z)| = \left| \frac{1 - |a_k|}{|a_k|} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{1 - \bar{a}_k z} - 1 \right) \right|$$
$$\leq \frac{1 - |a_k|}{|a_k|} \left(\frac{2}{1 - r} + 1 \right).$$

従って，仮定より $\sum_{k=1}^{n} |1 - b_k(z)|$ は広義一様収束，従って $B_n(z)$ は広義絶対一様収束する。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} |B_m(e^{i\lambda}) - B_n(e^{i\lambda})|^2 d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (|B_m(e^{i\lambda})|^2 + |B_n(e^{i\lambda})|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, B_n(e^{i\lambda})\overline{B_m}(e^{i\lambda}))d\lambda$$

$$= 4\pi - 2\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n(e^{i\lambda})}{B_m(e^{i\lambda})} d\lambda, \quad (\overline{B_m}(e^{i\lambda}) = 1/B_m(e^{i\lambda})).$$

$n > m$ のとき $B_n(z)/B_m(z)$ は $|z|<1$ で解析的 $|z|\leq 1$ で連続だから

$$= 4\pi - 4\pi\left(\frac{B_n}{B_m}\right)(0)$$

$$= 4\pi\left(1 - \prod_{k=m+1}^{n} |a_k|\right).$$

従って $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0$ のとき $B_n(e^{i\lambda})$ は $L^2[d\lambda]$ でコーシー列をなす．すなわち $B_n(e^{i\lambda}) \to f_2(\lambda)$ in $L_+^2[d\lambda]$, $|f_2(\lambda)| = 1$. 定理3.1の対応によって $f_2(\lambda)$ に対応する H^2 の関数は $B(z)$ であることが直ちにわかる。従って $B(z)$ は inner function でその0点は $a_1, a_2, \cdots$. (q.e.d.)

定義4.4. $|z|<1$ 上の関数 $g(z)$ が singular function

$$\Longleftrightarrow \quad g(z) = \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} d\mu(\lambda)\right].$$

ここで $d\mu(\lambda)$ は有限，正値，特異な測度．

定理4.5. $g(z)$ が singular function

$\Longleftrightarrow$

$g(z)$ が $g(0)>0$, $|z|<1$ で0点をもたない inner function.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. (⇒) の証明.

$$|g(re^{i\theta})| = \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,d\mu(\lambda)\right].$$

$d\mu(\lambda)$ が特異な測度だから

$$\lim_{r\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,d\mu(\lambda) = 0 \quad (a.e.\ d\theta).$$

故に

$$\lim_{r\uparrow 1}|g(re^{i\theta})| = 1 \quad (a.e.\ d\theta).$$

$g(0)>0$, $g(z)\neq 0$, $|z|<1$ で解析的であることは積分表示から明らか。

(⇐) の証明. $g(z)$ は 0 点のない解析関数だから $g(z) = \exp[-h(z)] = \exp[-u(z)-iv(z)]$ と表わされる. ここで $h(z)$ は解析関数, $u(z)$, $v(z)$ は実調和関数。 $|g(z)|\leq 1$ だから $u(z)\geq 0$. 従って正の測度 $d\mu(\lambda)$ が存在して

$$u(re^{i\theta}) = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\lambda)\,d\mu(\lambda) = 2\pi\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+re^{i\theta}}{e^{i\lambda}-re^{i\theta}}\,d\mu(\lambda)$$

と表わされる. $g(0)>0$ だから $v(0)=0$, かつ $v(z)$ は $u(z)$ の harmonic conjugate だから

$$v(z) = \mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\mu(\lambda)$$

と表わされる. すなわち

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$h(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\, d\mu(\lambda)$$

$$\lim_{r\uparrow 1} |g(re^{i\lambda})| = \lim_{r\uparrow 1} \exp[-u(re^{i\lambda})] = 1$$

だから $d\mu(\lambda)$ は特異な測度.　　　　　　　　　　(q.e.d.)

定理 4.6. (Factorization theorem)

$f(z) \in H^1$, $f(z) \not\equiv 0$

$\Longleftrightarrow$

$$f(z) = B(z)S(z)F(z).$$

ここで $B(z)$ は Blaschke product, $S(z)$ は singular function, $F(z)$ は H^1 に属する outer function。

証明. $(\Leftarrow)$ は明らか.

$(\Rightarrow)$ の証明. $f(0)$ が p位 (≥ 0) の 0点であると仮定する.

$f(z) = z^p f_1(z)$ とおくと $f_1(z) \in H^1$ かつ $f_1(0) \neq 0$。定理4.2より $f_1(z) = g(z)F(z)$ と分解される. ここで $g(z)$ は inner function, $F(z)$ は outer function。定数は $g(0) > 0$ となるように選んでおく。次に $g(z)$ の0点を $a_1, a_2, \cdots$ とおくと $0 < |a_n| < 1$ で

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

とおくと $B_n(z)$ は $|z| < 1$ で 0点 $a_1, \cdots, a_n$ をもつ有理関数で $|B_n(e^{i\lambda})| = 1$。従って $g(z)/B_n(z)$ は $|z| < 1$ で解析関数であって

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$|g(e^{i\lambda})|/|B_n(e^{i\lambda})| \leq 1$. 従って $|g(z)| \leq |B_n(z)|$. 特に

$$0 < |g(0)| \leq |B_n(0)| = \prod_{k=1}^{n} |a_k| .$$

故に $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0$. 従って定理4.4より Blaschke product

$$B(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \right]$$

が定義できる. $g(z)z^p/B(z)$ は $|z|<1$ で解析的で $|g(e^{i\lambda})|/|B(e^{i\lambda})| = 1$ かつ $|z|<1$ で0点をもたないことは明らかだから

$$S(z) = g(z)z^p/B(z)$$

とおくと $S(z)$ は定理4.5より singular function. 作り方から明らかに $f(z) = B(z)S(z)F(z)$. (q.e.d.)

参考文献

[1] K. Hoffman; Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, (1972).

[2] A. Zygmund; Trigonometric series. Vol.I.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

附録Ⅱ. Kolmogorov 以後のいくつかの結果

Kolmogorov の仕事以後, A.M. Yaglom, Yu. A. Rozanov, I.A. Ibragimov 等主としてロシア学派による定常過程についての一連の研究がある. この附録Ⅱでは Kolmogorov の仕事と附録Ⅰをもとにして §1 Interpolation (Yaglom [1], Rozanov [1], [2]), §2 Markovian property (Doob [1], Rozanov [6], Ibragimov-Rozanov [7], S.C.Chay [1], §3 Regularity (Ibragimov-Rozanov [7]) について若干の結果を紹介する.

§1. Interpolation

§1, §2, §3 を通じて以下のような記号を用いる.

$\{x(t);\ t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$: 複素 Hilbert 空間 H 上の定常列.

C.L.H. $\{x(t);\ t\in A\}$: $x(t)\in H$, $t\in A$ によって張られる H の閉部分空間.

$H_x = $ C.L.H. $\{x(t);\ t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

$H^+(T) = $ C.L.H. $\{x(t);\ t\in T\}$

$H^-(T) = H^+(T^c) = $ C.L.H. $\{x(t);\ t\notin T\}$

$\Delta(T) = H^+(T)\ominus H^-(T) = H_x \ominus H^-(T)$

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda x(0)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

とするとき

$$dF_{xx}(\lambda) = \|dE_\lambda x(0)\|$$

$$L^2[dF_{xx}] = \left\{\varphi(\lambda);\ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) < +\infty\right\}$$

$$L^+[T] = \text{C.L.H.}\left\{e^{it\lambda}\ ;\ t \in T\right\}$$

$$L^-[T] = L^+[T^c] = \text{C.L.H.}\left\{e^{i\lambda t}\ ;\ t \notin T\right\}.$$

A を対応 $x(t) \longrightarrow e^{i\lambda t}$ によって定まる H_x から $L^2[dF_{xx}]$ への *isometric onto* な写像とする. 明らかに

$$AH^+(T) = L^+[T]$$

$$AH^-(T) = L^-[T].$$

H の内積を $(\ ,\ )$ ノルムを $\|\ \|$,

$L^2[dF_{xx}]$ の内積を $(\ ,\ )_L$, ノルムを $\|\ \|_L$ で表わす.

<u>定義 1.1.</u> $\{x(t)\}$ が *singular* (*linearly interpolable*)

$$\Longleftrightarrow \bigcap_{\substack{T \\ \text{有限集合}}} H^-(T) = H_x.$$

<u>定義 1.2.</u> $\{x(t)\}$ が *regular*

$$\Longleftrightarrow \bigcap_{\substack{T \\ \text{有限集合}}} H^-(T) = \{0\}$$

(すなわち再生核をもつ Hilbert 空間の言葉でいえば 台が compact

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

な関数が dense である).

注意. 定義1.1, 1.2 における singular, regular の定義は, コルモゴロフの論文における「特異」と「正則」とは異なることに注意せよ.

以後この §1 では T が有限集合であることを仮定する.

$\{x(t)\}$ のスペクトルがルベーグ測度に関して絶対連続でないか, 絶対連続であっても密度関数 $f_{xx}(\lambda)$ がルベーグ測度正の集合上で 0 となれば Kolmogorov §9 の定理 23 より

$$H_x = \text{C.L.H.}\{x(t);\ t \leq t_0 - 1\} \subset H^-(T)$$
$$(T = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\})$$

だから $\{x(t)\}$ は常に定義1.1の意味で singular である。よって以下 $\{x(t)\}$ のスペクトルがルベーグ測度に関して絶対連続で, その密度関数 $f_{xx}(\lambda)$ はルベーグ測度 0 の集合を除いて 0 にならないと仮定する.

$$B(T) = \left\{ b(\lambda) = \sum_{t \in T} b_t e^{i\lambda t};\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b(\lambda)|^2}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda < +\infty \right\}$$

$B(T) \ni b_1(\lambda), b_2(\lambda)$ に対して内積を

$$(b_1, b_2)_B = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b_1(\lambda)\overline{b_2(\lambda)}}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda$$

で定義すると B(T) は有限次元 Hilbert 空間となる.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

__定理 1.1.__ $\Delta(T)$ と $B(T)$ は同型である．（同じ次元をもつ有限次元 Hilbert 空間.) その対応は

$\Delta(T) \ni y$ に対し

$$(*) \qquad (Ay)\, f_{xx}(\lambda) = b_y(\lambda) \in B(T)$$

で与えられる．

__証明.__ $\Delta(T) \ni y$ に対して $Ay = g_y(\lambda) \in L^2[dF_{xx}]$ とおく。$\Delta(T)$ の定義から任意の $t \notin T$ に対して $(y, x_t) = 0$。従って $(Ay, Ax_t)_L = 0$. これを書きなおせば

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_y(\lambda)\, e^{-it\lambda} f_{xx}(\lambda)\, d\lambda = 0 \qquad t \notin T.$$

$\{e^{it\lambda};\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は $L^2[d\lambda]$ で完全直交系だから

$$g_y(\lambda)\, f_{xx}(\lambda) = b_y(\lambda)$$

$$= \sum_{t \in T} b_t(y)\, e^{it\lambda} \quad \text{in } L^2[d\lambda]$$

と表わされる。$f_{xx}(\lambda) \neq 0$ a.e. $d\lambda$ だから

$$g_y(\lambda) = \frac{b_y(\lambda)}{f_{xx}(\lambda)} \qquad \text{a.e. } d\lambda$$

$$(g_y, g_y)_L = \int_{-\pi}^{\pi} |g_y(\lambda)|^2 f_{xx}(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b_y(\lambda)|^2}{f_{xx}(\lambda)}\, d\lambda < +\infty$$

$$= (b_y, b_y)_B .$$

逆に $B(T) \ni b(\lambda) = \sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda}$ とすると明らかに $b(\lambda)/f_{xx}(\lambda) \in L^2[dF_{xx}]$ かつ任意の $s \notin T$ に対して

$$(b(\lambda)/f_{xx}(\lambda), e^{is\lambda})_L = \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda) e^{-is\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda - is\lambda} d\lambda = 0.$$

故に

$$\frac{b(\lambda)}{f_{xx}(\lambda)} \perp L^-(T).$$

故に

$$A^{-1}(b(\lambda)/f_{xx}(\lambda)) \in \Delta(T).$$

さらに

$$\|b/f_{xx}\|_L^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b(\lambda)|^2}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda$$

$$= (b, b)_B.$$

よって $\Delta(T)$ と $B(T)$ は同型でその対応は (※) で与えられる。

(q.e.d.)

<u>系 1.1.</u> $\{x(t)\}$ が singular

$\Longleftrightarrow$ z の任意の多項式 $P(z)$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P(e^{i\lambda})|^2}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda = +\infty.$$

<u>証明</u>. 定理 1.1 から明らか. (q.e.d.)

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\mathcal{P} = \left\{ P(z) \neq 0 \; ; \; z \text{ の多項式で } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P(e^{i\lambda})|^2}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda < +\infty \right\}$$

とおく．明らかに $\mathcal{P}$ は多項式環の ideal である．よく知られているように多項式環のすべての ideal は単項 ideal である。従って $\mathcal{P}$ はある多項式

$$P_0(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{m_k}$$

によって生成される．さらに $\mathcal{P}$ の定義から $a_k = e^{i\lambda_k}$ に限られる。
$(\lambda_k \in [-\pi, \pi))$.

<u>定義 1.3.</u> 上の λ_k を $f_{xx}(\lambda)$ の 0 点，m_k をその多重度と呼ぶ。

<u>系 1.2.</u> $T = \{t_0, t_0+1, \cdots, t_0+d-1\}$ のとき

$$\begin{aligned} \dim \Delta(T) &= d - m \quad \text{if} \quad d > m = \sum_{k=1}^{n} m_k \\ &= 0 \quad \text{if} \quad d \leq m . \end{aligned}$$

ここで m_k は 0 点の多重度．

<u>証明.</u> $$\begin{aligned} B(T) \ni b(\lambda) &= \sum_{t \in T} b_t e^{it\lambda} \\ &= e^{it_0\lambda} \left(\sum_{k=0}^{d-1} b_k e^{ik\lambda} \right) \\ &= e^{it_0\lambda} P(e^{i\lambda}) . \end{aligned}$$

ここで $P(z)$ は高々 $(d-1)$ 次の多項式。従って $d \leq m$ のときは $P(z) \notin \mathcal{P}$.
すなわち $B(T) = \{0\}$. 故に定理 1.1 より $\dim \Delta(T) = 0$. $d > m$ のときは

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$B(T) \ni b(\lambda)$ は

$$b(\lambda) = e^{it_0\lambda} P_0(e^{i\lambda}) Q(e^{i\lambda})$$

の形をしていなければならない。ここで $Q(z)$ は高々 $(d-m-1)$ 次の多項式。$Q(z)$ の次数が異なれば $B(T)$ の元として一次独立だから $B(T)$ の次元は $d-m$。 (q.e.d.)

系 1.3. $\{x(t)\}$ が regular

$\Longleftrightarrow$ 有限集合 T と関数 $b(\lambda) = \sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda}$ が存在して，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b(\lambda)|^2}{f_{xx}(\lambda)} d\lambda < +\infty$$

（スペクトルの絶対連続性は最初から仮定されている）。

証明．($\Rightarrow$) 仮定より有限集合 T が存在して $H_x \supsetneqq H^-(T)$。従って $\Delta(T) = H_x \ominus H^-(T) \neq \{0\}$。従って定理 1.1 より $\Delta(T) \cong B(T) \neq \{0\}$。

($\Leftarrow$) $B(T) \neq \{0\}$。従って，明らかに任意の s に対して $B(T) \cong B(T+s) \neq \{0\}$。$B(T) \ni b(\lambda) = \sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda} \neq 0$ とおく。$b_s(\lambda) = e^{i\lambda s} b(\lambda) \in B(T+s)$。任意の s に対して $b_s(\lambda)/f_{xx}(\lambda) \in L^2[dF_{xx}]$ と直交する $L^2[dF_{xx}]$ の元 $g(\lambda)$ は 0 元であることを示そう．

$$(b_s(\lambda)/f_{xx}(\lambda), g(\lambda))_L$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} b_s(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda s} \sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda}\, \overline{g(\lambda)}\, d\lambda = 0, \quad \forall s.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

故に

$$\sum_{t\in T} b_t e^{it\lambda}\,\overline{g(\lambda)} = 0 \quad a.e.\,d\lambda\,.$$

$\sum_{t\in T} b_t z^t$ ($\neq 0$) は z の多項式だから $b(\lambda) \neq 0$ ($a.e.\,d\lambda$). 故に

$g(\lambda) = 0$ ($a.e.\,d\lambda$).

かくて $\bigcup_s \Delta(T+s)$ は H_x で dense であることが証明された。

$\Delta(T) = H_x \ominus H^-(T)$ だから

$$\{0\} = \bigcap_s H^-(T+s) \supset \bigcap_{\substack{T \\ \text{有限集合}}} H^-(T)$$

(q.e.d.)

スペクトルが絶対連続でない場合，一般に次の定理が成りたつ。

<u>定理 1.2.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ は次のように表現される。

$$x(t) = y(t) + z(t)\,.$$

ここで，$y(t)$, $z(t)$ はこの§の意味でそれぞれ，regular および singular であって，任意の有限集合 T に対して

$$H_x^-(T) = H_y^-(T) \oplus H_z^-(T)\,.$$

さらに $\{x(t)\}$ が non-singular すなわち $y(t) \neq 0$ のとき，$\{x(t)\}$ のスペクトルを $dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda + dF_S(\lambda)$ とすると，($dF_S(\lambda)$ はルベーグ測度に対して特異な部分) $\{y(t)\}$ のスペクトル $dF_y(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$，$\{z(t)\}$ のスペクトル $dF_z(\lambda) = dF_S(\lambda)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. $\displaystyle\bigcap_{\substack{T\\ 有限集合}} H^-(T) = H_\infty$

とおき

$$P_{H_\infty} x(t) = z(t)$$

$$y(t) = x(t) - z(t)$$

とすると、明らかに $\{y(t)\}$, $\{z(t)\}$ は定常列であって、容易に、$\forall t, s$ に対して $(y(t), z(s)) = 0$ が導かれる。さらに、任意の有限集合 T に対して、

$$H_z^-(T) \equiv \text{C.L.H.}\{z(t);\ t \notin T\} \subset H_\infty \subset H_x^-(T)$$

$$H_y^-(T) \equiv \text{C.L.H.}\{y(t);\ t \notin T\} = \text{C.L.H.}\{x(t) - z(t); t \notin T\}$$
$$\subset H_x^-(T).$$

故に

$$H_x^-(T) \supset H_y^-(T) \oplus H_z^-(T).$$

逆の包含関係は明らかだから

$$H_x^-(T) = H_y^-(T) \oplus H_z^-(T).$$

今、$h \in \displaystyle\bigcap_{有限集合} H_y^-(T) \equiv H_\infty^y$ とすると

$$H_\infty^y \subset \bigcap_{有限集合} \{H_y^-(T) \oplus H_z^-(T)\} = H_\infty .$$

一方、$y(t) \perp H_\infty$ だから $H_y^-(T) \perp H_\infty$。従って $h = 0$。すなわち $\{y(t)\}$ は regular. また、

$$P_{H_\infty}(H_y^-(T) \oplus H_z^-(T)) = P_{H_\infty}(H_z^-(T))$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$= H_z^-(T) \supset H_\infty ,$$

$H_z^-(T) \subset H_\infty$ は明らかだから $H_z^-(T) = H_\infty$. すなわち $\{z(t)\}$ は singular. 定理の後半の証明に移ろう.

$H_y \perp H_z$ より

$$dF(\lambda) = dF_y(\lambda) + dF_z(\lambda)$$

と表わされるが，さらに $\{y(t)\}$ が regular だから $dF_y(\lambda) = f_y(\lambda)d\lambda$ と書ける. $\{x(t)\}$ は non-singular だから，定理1.1 の系1.1 より $\delta(\lambda) = \sum_{t\in T} c_t e^{i\lambda t}$ が存在して，(附録I の定理3.3 より $\delta(\lambda)dF(\lambda) = \delta(\lambda)f(\lambda)d\lambda$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\delta(\lambda)|^2}{f(\lambda)^2} dF(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\delta(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < +\infty .$$

$\{x(t)\}$, $\{y(t)\}$, $\{z(t)\}$ をそれぞれスペクトル分解すると

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dE_x(\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dE_y(\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dE_z(\lambda) .$$

定理1.1 より

$$h = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\delta(\lambda)}{f(\lambda)} dE_x(\lambda)$$

は $\Delta(T)$ に属するから H_z と直交する. ところが

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\lambda)/f(\lambda)\, dE_y(\lambda) \in H_y \perp H_z .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

従って

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\lambda)/_{f(\lambda)}\, dE_z(\lambda) = 0.$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\delta(\lambda)/f(\lambda)|^2 dF_z(\lambda) = 0.$$

$|\delta(\lambda)/f(\lambda)|^2 > 0$ (a.e. $d\lambda$) だから $dF_z(\lambda)$ は特異. 従って $dF_s(\lambda) = dF_z(\lambda)$. 従って $f(\lambda) = f_y(\lambda)$. (q.e.d.)

§2. Markovian property

Markovian property とは $P_{H^-(T)}H^+(T)$ ($H^+(T)$ の $H^-(T)$ への射影) がある限られた集合 S から張られる閉部分空間 $H^+(S)$ に一致する時をいう。特にこの§2では次の三つの場合を取り扱う。

[I] $T = (0, 1, 2, \cdots)$

$S = (-n, -n+1, \cdots, -1)$

(n 重マルコフ)

[II] L を 0 を含まない有限集合, T を任意の有限集合とするとき

$S = \{s;\ s-t \in L,\ t \in T\} - T$

(Rozanov の L-マルコフ)

[III] $H^+ = C.L.H.\{x(t);\ t \geq 0\} \longleftrightarrow L^+$

$H^- = C.L.H.\{x(t);\ t \leq 0\} \longleftrightarrow L^-$

$$H^{+/-} = P_{H^-} H^+ \qquad \longleftrightarrow L^{+/-}$$

$$H_0 = C.L.H.\ \{x(0)\} \quad \longleftrightarrow L_0 .$$

定義から

$$H_x \supset H^- \supset H^{+/-} \supset H^+ \cap H^- \supset H_0 .$$

または $\qquad L^2[dF_{xx}] \supset L^- \supset L^{+/-} \supset L^+ \cap L^- \supset L_0 .$

このときスペクトルの関係から包含関係を調べること.

[I] $\{x(t)\}$ のスペクトルがルベーグ測度に関して絶対連続でないならば $H_x = H^+(S)$ のときを除いて [I] の意味の Markovian property をもたないことは明らか。従って $dF_{xx}(\lambda) = f_{xx}(\lambda)d\lambda$ と表わされることを仮定する.

<u>定理2.1.</u> $P_{H^-(T)} H^+(T) = H^+(S)$, $\qquad T = (0, 1, 2, \cdots)$, $S = (-n, -n+1, \cdots, -1)$.

$$\Longleftrightarrow \quad f_{xx}(\lambda) = \frac{1}{|P(e^{i\lambda})|^2} .$$

ここで $P(z)$ は n 次の多項式で $P(0) \neq 0$.

<u>注意.</u> $P(z)$ は一意ではない。$f_{xx}(\lambda) \in L^1[d\lambda]$ より $P(z)$ は $|z| = 1$ 上に 0 点を持たない。さらに任意の複素数 a に対して

$$|a||e^{i\lambda} - 1/\bar{a}| = |e^{i\lambda} - a|$$

だから $P(z)$ は単位円 $|z| < 1$ 内に 0 点を持たないと仮定して一般性を失わない。$|z| \leq 1$ に 0 点を持たないように多項式を選べば絶対値が 1 の複

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

素数倍を除いて一意に定まる。

証明. ($\Rightarrow$) 仮定より

$$P_{H^-(T)}x(0)=\sum_{k=1}^{n}a_k x(-k)$$

と表わされる。ここで $a_n \neq 0$ を示そう。もし $a_n=0$ と仮定すると

$$P_{H^-(T)}x(0)\in H^+(S'),\quad S'=(-n+1,\cdots,-1).$$

さらに

$$P_{H^-(T+1)}x(1)=\sum_{k=1}^{n-1}a_k x(-k+1)$$

だから

$$P_{H^-(T)}x(1)=\sum_{k=2}^{n-1}a_k x(-k+1)+a_1 P_{H^-(T)}x(0)$$

$$\in H^+(S').$$

以下同様にして任意の $s\geq 2$ に対して

$$P_{H^-(T)}x(s)\in H^+(S').$$

よって

$$P_{H^-(T)}H^+(T)\subset H^+(S')\subsetneqq H^+(S)$$

(スペクトルが絶対連続だから). 故に矛盾。$a_n\neq 0$ が証明された。

次に $P_{H^-(T)}$ の定義から，任意の $j\leq -1$ に対して

$$\left(x(0)-\sum_{k=1}^{n}a_k x(-k),\ x(j)\right)=0$$

特に，$y(j)=x(j)-\sum_{k=1}^{n}a_k x(j-k)$ とおくと $j\leq -1$ であるかぎり $y(j)\in$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$H^-(T)$。 従って

$$\left(x(0)-\sum_{k=1}^{n}a_k x(-k),\ y(j)\right)=0.$$

これを書きなおすと

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-ik\lambda}\right)e^{-ij\lambda}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k e^{ik\lambda}\right)f_{xx}(\lambda)d\lambda=0$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ij\lambda}\left|1-\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k e^{ik\lambda}\right|^2 f_{xx}(\lambda)d\lambda=0.$$

両辺の共役複素数を考えると $|j|\geq 1$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\lambda}\left|1-\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k e^{ik\lambda}\right|^2 f_{xx}(\lambda)d\lambda=0.$$

従って，附録Iの補題 3.3 より

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k e^{ik\lambda}\right|^2 f_{xx}(\lambda)d\lambda = c\,d\lambda$$

$$f_{xx}(\lambda)=\frac{1}{|P(e^{i\lambda})|^2},\quad \sqrt{c}\,P(z)=1-\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k z^k$$

と表わされ $P(0)\neq 0$.

さらに

$$\left(x(0)-\sum_{k=1}^{n}a_k x(-k),\ x(-j)\right)=0$$

を書きなおすと

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-ik\lambda}\right)e^{ij\lambda}f_{xx}(\lambda)d\lambda=0.$$

故に

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ij\lambda}/P(e^{i\lambda})\,d\lambda=0.$$

複素積分に書きなおすと

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{j-1}}{P(z)}\, dz = 0 \qquad j \geq 1 .$$

従って $P(z)$ は $|z|<1$ に 0点を持たない。

($\Leftarrow$) の証明．注意に従って $P(z)$ は $|z| \leq 1$ で 0点を持たないと仮定して一般性を失わない。

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n , \quad a_n \neq 0$$

とおく。仮定から $P(0) \neq 0$．従って $a_0 \neq 0$．

今

$$P_{H^-(T)}\, \bar{a}_0 x(0) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k x(-k)$$

を示そう。

任意の $j \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{a}_0 x(0) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k x(-k),\ x(-j)\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k e^{-ik\lambda + ij\lambda} f_{xx}(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ij\lambda}}{P(e^{i\lambda})}\, d\lambda \\
&= -i \oint_{|z|=1} \frac{z^{j-1}}{P(z)}\, dz \\
&= 0 \qquad j = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}$$

故に $P_{H^-(T)}\, \bar{a}_0 x(0) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k x(-k) \in H^+(S)$.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

さらに $P_{H^-(T)}x(1) = P_{H^-(T)}P_{H^-(T+1)}x(1) \in H^+(S)$. 以下同様にして $j \geq 2$ に対して $P_{H^-(T)}x(j) \in H^+(S)$. 従って $P_{H^-(T)}H^+(T) \subset H^+(S)$

次に $P_{H^-(T)}H^+(T)$ に直交する $H^+(S)$ の元は 0 しかないことを示す.

$y \in H^+(S) \ominus P_{H^-(T)}H^+(T)$ に対して $Ay = g(\lambda)$ とおく。任意の $t \geq 0$ に対して

$$0 = (y, P_{H^-(T)}x(t)) = (y, x(t))$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\lambda)e^{-it\lambda}}{|P(e^{i\lambda})|^2} d\lambda$$

$$P(z) = c(z-b_1)^{m_1} \cdots (z-b_p)^{m_p}$$

とおく。ここで

$$m_1 + \cdots + m_p = n$$

$$|b_j| > 1.$$

さらに

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k e^{-ik\lambda}$$

とかけるから $t \geq 0$ に対して

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k e^{-ik\lambda - it\lambda} d\lambda}{|c|^2 e^{-in\lambda} \prod_{j=1}^{p} (e^{i\lambda} - b_j)^{m_j} (1 - \bar{b}_j e^{i\lambda})^{m_j}}$$

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k z^{n-k-t-1} dz}{|c|^2 \prod_{j=1}^{p} (z-b_j)^{m_j} (1-\bar{b}_j z)^{m_j}}.$$

原点以外の留数を r とすると, $t = 0, 1, \cdots, n-1$ の場合を考えて,

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$(g_1+\cdots+g_{k-1}+g_{k+1}+\cdots+g_n)r+g_k(r+1)=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$ を得る. 従って $g_1=g_2=\cdots=g_n=0$. (q.e.d.)

__定理 2.2.__ $dF_{xx}(\lambda)=f_{xx}(\lambda)d\lambda$ のとき $P_{H^-(T)}H^+(T)$ が n 次元

$$\Longleftrightarrow \quad f_{xx}(\lambda)=\frac{|Q(e^{i\lambda})|^2}{|P(e^{i\lambda})|^2},$$

ここで $P(z)$ は n 次, $Q(z)$ は高々 $(n-1)$ 次の多項式. $P(z)$ と $Q(z)$ は互に素. 定理 2.1 の注意から $P(z)$ は $|z|\le 1$ で, $Q(z)$ は $|z|<1$ で 0 点をもたないと仮定して一般性を失わない。

__証明.__ $(\Rightarrow)$ の証明. 仮定から一次独立なベクトル $y_1,\cdots,y_n \in H^-(T)$ が存在して, 任意の $t\ge 0$ に対して

$$P_{H^-(T)}x(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)y_k$$

と表わされる. 従って任意の $s\ge 1$ に対して

$$\begin{aligned}(x(t),\,x(-s))&=(P_{H^-(T)}x(t),\,x(-s))\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)(y_k,\,x(-s)).\end{aligned}$$

$$(y_k,\,x(-s))=\omega_k(s)$$

とおくと

$$B(t+s)=(x(t),x(-s))=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\omega_k(s),\quad t\ge 0,\ s\ge 1.$$

ここで $(\omega_1(s),\cdots,\omega_n(s))$ は $s\ge 1$ で一次独立な関数である. 実際任意の $s\ge 1$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(s) = 0$$

とすると，定義から

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k, x(-s)\right) = 0.$$

$y_1, \cdots, y_n \in H^-(T)$ だから $H^-(T)$ の元として

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k = 0.$$

$y_1, \cdots, y_n$ は一次独立だから $c_1 = \cdots = c_n = 0$. 故に $(\omega_1(s), \cdots, \omega_n(s))$ は $s \geq 1$ の関数として一次独立.

$$\Delta g(s) = g(s) - g(s-1)$$

$$\Delta^j g(s) = \Delta\Delta^{j-1} g(s)$$

とおくと $x(s)$ に関する差分方程式

$$\begin{vmatrix} x(s), & \omega_1(s), & \cdots, & \omega_n(s) \\ \Delta x(s), & \Delta\omega_1(s), & \cdots, & \Delta\omega_n(s) \\ \vdots & & & \\ \Delta^n x(s), & \Delta^n\omega_1(s), & \cdots, & \Delta^n\omega_n(s) \end{vmatrix} = 0$$

は $x(s) = \omega_k(s)$ なる n 個の一次独立な解をもつから Δ に関する実数係数の n 次多項式 $R(s, \Delta)$ が存在して

$$R(s, \Delta)\,\omega_k(s) = 0 \qquad (s \geq n+1).$$

従って

$$P(\Delta)\,B(t+n+1) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,P(\Delta)\,\omega_k(n+1) = 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで $P(\Delta) = R(n+1, \Delta)$.

差分方程式

$$P(\Delta)\,B(t) = 0 \qquad (t \geq n+1)$$

の解は

$$B(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j^{\,t} Q_j(t)$$

と表わされる。ここで $Q_j(t)$ は n_j 次の多項式で, $n_1 + \cdots + n_m = n - m$.

b_j は $P(z-1)$ の (n_j+1) 重根（高橋健人「差分方程式」新数学シリーズ培風館）

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f_{xx}(\lambda)\,d\lambda$$

と表わされるから $\lim_{t \to \pm\infty} B(t) = 0$. 従って $|b_j| < 1$. さらに

$$\Delta B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-1)\lambda}(e^{i\lambda}-1) f_{xx}(\lambda)\,d\lambda$$

より

$$\begin{aligned} P(\Delta)\,B(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-1)\lambda} P(e^{i\lambda}-1) f_{xx}(\lambda)\,d\lambda \\ &= 0, \qquad t \geq n+1. \end{aligned}$$

故に $\qquad \overline{P}(-\Delta)\,P(\Delta)\,B(t) = 0, \qquad t \geq 2n+1.$

ところが $\qquad -\Delta\, e^{i(t-1)\lambda} = e^{i(t-1)\lambda}(e^{-i\lambda}-1)$

だから

$$\overline{P}(-\Delta)\,P(\Delta)\,B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-1)\lambda} |P(e^{i\lambda}-1)|^2 f_{xx}(\lambda)\,d\lambda$$

$$= 0, \quad t \geq 2n+1.$$

故に $|t| \geq 2n$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} |P(e^{i\lambda}-1)|^2 f_{xx}(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

従って

$$|P(e^{i\lambda}-1)|^2 f_{xx}(\lambda) = \sum_{k=-2n+1}^{2n-1} g_k e^{ik\lambda}.$$

これを

$$P(\Delta) B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-1)\lambda} P(e^{i\lambda}-1) f_{xx}(\lambda)\, d\lambda$$

$$= 0, \quad t \geq n+1,$$

に代入して

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-1)\lambda} \cdot \frac{\sum_{k=-2n+1}^{2n-1} g_k e^{ik\lambda}}{\overline{P(e^{i\lambda}-1)}}\, d\lambda$$

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{\sum_{k=-2n+1}^{2n-1} g_k z^{(t+k-2)}}{\overline{P}(1/z - 1)}\, dz, \quad t \geq n+1.$$

前に注意したことより $\overline{P}(1/z - 1)$ の根はすべて $|z| > 1$ 内にあるから,

$$g_k = 0, \quad k = -n, -n-1, \cdots, -2n+1.$$

$f_{xx}(\lambda)$ が実数であることから

$$|P(e^{i\lambda}-1)|^2 f_{xx}(\lambda) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} g_k e^{ik\lambda}$$

$$= |Q(e^{i\lambda})|^2.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで $Q(z)$ は高々 $(n-1)$ 次の多項式とかける。

$(\Leftarrow)$ の証明. $Q(z)$ は $|z|<1$ で 0 点をもたないように選んでおく。このことを考慮すると

$$\frac{e^{-ik\lambda}}{\overline{Q(e^{i\lambda})}}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

は $L^-(T)$ に属することがわかる。これらが $P_{L^-(T)}L^+(T)$ の base になることを示そう。

そのために，まず $Q(0)=1$ となるように定数を選んでおく。$P(0)=p_0$ とすると

$$P_{L^-(T)}\bar{p}_0 = \bar{p}_0 - \frac{\overline{P(e^{i\lambda})}}{\overline{Q(e^{i\lambda})}}$$

を示す。右辺は $Q(0)=1$ より $e^{-ik\lambda}/\overline{Q(e^{i\lambda})}$, $k=1,2,\cdots,n$ の一次結合で書ける。$s\geq 1$ に対して

$$\left(\frac{\overline{P(e^{i\lambda})}}{\overline{Q(e^{i\lambda})}}, e^{-is\lambda}\right)_L = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{P(e^{i\lambda})}\, e^{is\lambda}}{\overline{Q(e^{i\lambda})}} \frac{|Q(e^{i\lambda})|^2}{|P(e^{i\lambda})|^2}\, d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q(e^{i\lambda})e^{is\lambda}}{P(e^{i\lambda})}\, d\lambda$$

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{Q(z)z^{(s-1)}}{P(z)}\, dz$$

$$= 0, \quad s=1,2,\cdots,$$

故に

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$P_{L^-(T)}\bar{p}_0 = \bar{p}_0 - \frac{P(e^{i\lambda})}{Q(e^{i\lambda})} .$$

$$P_{L^-(T)} e^{i\lambda} = P_{L^-(T)} P_{L^-(T+1)} e^{i\lambda} = P_{L^-(T)} e^{i\lambda} P_{L^-(T)} 1$$

から $P_{L^-(T)} e^{i\lambda}$ は $e^{-ik\lambda}/\overline{Q(e^{i\lambda})}$, $k=1,2,\cdots,n$ の一次結合で表わされる。$P_{L^-(T)} e^{it\lambda}$, $t=0,1,\cdots,n-1$ は一次独立。故に $e^{-ik\lambda}/\overline{Q(e^{i\lambda})}$, $k=1,2,\cdots,n$ は $P_{L^-(T)}L^+(T)$ の *base*.

(q.e.d.)

[II] Lを，0を含まない有限集合，Tを有限集合とするとき

$S_T = \{s;\ s-t\in L,\ t\in T\} - T$ とおく.

$H_t(L) = \text{C.L.H.}\{x(s);\ s-t\in L\}$

$\hat{H}(t) = \text{C.L.H.}\{x(s);\ s\neq t\}$.

<u>定義 2.1.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が L-*field*

$\Longleftrightarrow$ 任意の t に対して

$$P_{\hat{H}(t)} x(t) \in H_t(L).$$

<u>定義 2.2.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が L-*Markov*

$\Longleftrightarrow$ 任意の有限集合 T に対して

$$P_{H^-(T)} H^+(T) \subset H^+(S_T).$$

$T=\{t\}$ とすれば定義から L-*Markov* $\Longrightarrow$ L-*field* であるが逆は必ずしも成立しない。

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

定理2.3. 定常列 $\{x(t)\}$ が L-field であるとする。§1の定理1.2によって $\{x(t)\}$ は regular な定常列 $\{y(t)\}$ と singular な定常列 $\{z(t)\}$ の和で表わされる。このとき，L上で定義された関数 $a(s)$ が存在して，任意の t と u に対して

$$y(t) - \sum_{s-t \in L} a(s-t) y(s) \perp y(u)$$

$$z(t) = \sum_{s-t \in L} a(s-t) z(s)$$

が成りたつ。すなわち $\{y(t)\}$, $\{z(t)\}$ 共に L-field である。

証明. $\{x(t)\}$ が L-field だから定義から L上の関数 $a(s)$ が存在して

$$P_{\hat{H}(0)} x(0) = \sum_{s \in L} a(s) x(s)$$

と書ける。定常性から任意の t と u に対して

$$\begin{aligned}
(P_{\hat{H}(t)} x(t), x(u)) &= (P_{\hat{H}(0)} x(0), x(u-t)) \\
&= \sum_{s \in L} a(s)(x(s), x(u-t)) \\
&= \sum_{s-t \in L} a(s-t)(x(s-t), x(u-t)) \\
&= \Big(\sum_{s-t \in L} a(s-t) x(s), x(u)\Big).
\end{aligned}$$

故に

$$P_{\hat{H}(t)} x(t) = \sum_{s-t \in L} a(s-t) x(s)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

を得る。 $x(t)=y(t)+z(s)$ だから

$$z(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)z(s)=x(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)x(s)-\Big(y(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)y(s)\Big)$$

と書ける。ところが左辺は $H_z=H_\infty$ に属し，右辺第一項は $\hat{H}(t)$ と，従って H_∞ と直交し，第二項は §1 定理1.2 によって $H_z=H_\infty$ と直交している。故に，左辺$=0$。右辺と $x(u)=y(u)+z(u)$ の内積を考えて

$$y(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)y(s)\perp y(u)\quad(t\neq u)$$

を得る。 (q.e.d.)

今，定常列 $\{x(t)\}$ のスペクトルを $dF(\lambda)=f(\lambda)d\lambda+dF_s(\lambda)$ と分解するとき，次の定理を得る。

<u>定理 2.4.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が non-singular な L-field

$$\Longleftrightarrow \quad f(\lambda)=a\Big(1-\sum_{s\in L}a_s e^{i\lambda s}\Big)^{-1},\quad a\neq 0$$

$$\text{carrier of } dF_s(\lambda)=\Big\{\lambda\,;\,1-\sum_{s\in L}a_s e^{i\lambda s}=0\Big\}.$$

<u>証明</u>. ($\Rightarrow$) §1の定理1.2に従って $x(t)=y(t)+z(t)$ と分解すると，定理2.3より

$$y(0)-\sum_{s\in L}a(s)y(s)\perp y(u),\quad(u\neq 0).$$

これを書きかえると，定理1.2の後半を使って

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$(y(0)-\sum_{s\in L}a(s)y(s),\ y(u))$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\lambda u}(1-\sum_{s\in L}a(s)e^{is\lambda})f(\lambda)d\lambda$$

$$=0.$$

従って，

$$(1-\sum_{s\in L}a(s)e^{is\lambda})f(\lambda)d\lambda=a\,d\lambda\quad(a\neq 0).$$

故に

$$f(\lambda)=a(1-\sum_{s\in L}a(s)e^{is\lambda})^{-1}$$

を得る．さらに $z(0)-\sum_{s\in L}a(s)z(s)=0$ より

$$\|z(0)-\sum_{s\in L}a(s)z(s)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|1-\sum_{s\in L}a(s)e^{is\lambda}|^2dF_s(\lambda)=0.$$

故に

$$\text{carrier } dF_s(\lambda)=\{\lambda;\ 1-\sum_{s\in L}a(s)e^{is\lambda}=0\}.$$

($\Leftarrow$) 上の議論を逆にたどると $u\neq 0$ に対して

$$y(0)-\sum_{s\in L}a(s)y(s)\perp y(u),\quad z(0)-\sum_{s\in L}a(s)z(s)=0.$$

定常性より，任意の $t\neq u$ に対して

$$y(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)y(s)\perp y(u)$$

$$z(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)z(s)=0.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$y(t) \perp z(s)$ より

$$x(t) - \sum_{s-t \in L} a(s-t) x(s) \perp x(u).$$

故に $\{x(t)\}$ は L-field で $y(t) \neq 0$ だから non-singular.

(q.e.d.)

<u>定理 2.5.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が non-singular L-field $\Longrightarrow$ L-Markov.

<u>証明.</u> Tを有限集合とし, $\Delta_T = H_x \ominus H^-(T)$ とすると

$$\omega(t) = x(t) - \sum_{s-t \in L} a(s-t) x(s), \quad t \in T$$

が Δ_T を張ることを示そう。ここで $a(s)$ は定理 2.3 で定まる L上の関数. $x(t)$ が L-field だから, $t \in T$, $u \notin T$ に対して $(\omega(t), x(u)) = 0$ すなわち $\omega(t) \in \Delta_T$. 定理 2.4より

$$(\omega(t+u), \omega(u)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left|1 - \sum_{s \in L} a(s) e^{i\lambda s}\right|^2 dF(\lambda)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} a \left(1 - \sum_{s \in L} a(s) e^{is\lambda}\right) d\lambda.$$

従って $\omega(t)$ はスペクトル関数 $dF_\omega(\lambda) = a\left(1 - \sum_{s \in L} a(s) e^{is\lambda}\right)$

をもつ定常列である。容易にわかるように $\{\omega(t);\, t\in T\}$ は一次独立で $\dim \Delta_T \leq k$ $(\equiv \# T)$ だから $\{\omega(t);\, t\in T\}$ は Δ_T を張っている。特に $\dim \Delta_T = k$ であることがわかる。$u\in T$ に対して $P_{H^-(T)}x(u) = x^*(u)$ とおくと，上のことより

$$x(u) - x^*(u) = \sum_{t\in T} c_t \omega(t)$$

とかける．すなわち

$$x^*(u) = x(u) - \sum_{t\in T} c_t \omega(t)$$

$$= \sum_{t\in T\cup S_T} b_t x(t).$$

従って

$$x^*(u) - \sum_{t\in S_T} b_t x(t) = \sum_{t\in T} b_t x(t).$$

ところが 左辺 $\in H^-(T)$ かつ Δ_T と直交し，$\dim \Delta_T = k$ だから $b_t = 0$, $t\in T$，すなわち

$$x^*(u) = \sum_{t\in S_T} b_t x(t).$$

(q.e.d.)

<u>定理 2.6.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が singular のとき L-field
$\Longleftrightarrow$ L上の関数 $a(s)$ が存在して

$$x(t) - \sum_{s-t\in L} a(s-t) x(s) = 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. ($\Rightarrow$) 定義より L 上の関数 $a(s)$ が存在して

$$P_{\hat{H}(0)}x(0)=\sum_{s\in L}a(s)x(s).$$

故に，任意の $u\neq 0$ に対して $x(0)-\sum_{s\in L}a(s)x(s)\perp x(u)$. ところが singular だから，$x(0)\in\hat{H}(0)=H_x$. 従って $x(0)-\sum_{s\in L}a(s)x(s)=0$. 定常性より，任意の t に対して

$$x(t)-\sum_{s-t\in L}a(s-t)x(s)=0.$$

($\Leftarrow$) は明らか. (q.e.d.)

定理 2.7. 定常列 $\{x(t)\}$ が singular のとき L-field は必ずしも L-Markov ではない.

証明. $L=\{+1,-1\}$ とする. $(U,V)=0$, $\|U\|=\|V\|=1$ なる2元をとってきて

$$x(t)=U\cos r\pi t+V\sin r\pi t$$

とおくと $R(t)=(x(s+t),x(s))=\cos r\pi t$. 簡単な計算により $r\neq\frac{2n+1}{2}\pi$ のとき

$$x(t)-\frac{x(t+1)}{2\cos r\pi}-\frac{x(t-1)}{2\cos r\pi}=0.$$

従って定理 2.6 より $\{x(t)\}$ は L-field. しかし r が有理数のとき，後で述べる定理 2.11 によって L-Markov ではない。

(q.e.d.)

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

以上の諸定理はパラメーターが Z^n に対しても一般に成立するが，次の定理は $n=1,2$ のときのみ成立する．

<u>定理2.8.</u> 定常列 $\{x(t)\}$ が non-singular L-field $\Rightarrow$ regular.

<u>証明.</u> 定理2.4によって $\{x(t)\}$ の singular part $\{z(t)\}$ のスペクトル $dF_z(\lambda)$ は $\{\lambda;\ 1-\sum_{s\in L}a(s)e^{i\lambda s}=0\}$ 上に集中している．

$$g(\lambda)=1-\sum_{s\in L}a(s)e^{i\lambda s}$$

とおき，$g(\lambda)$ の1つの0点を λ_0 とする．

$$f(\lambda)=a\Big(1-\sum_{s\in L}a(s)e^{i\lambda s}\Big)^{-1}$$

はスペクトル関数，従って非負な関数である。従って $g(\lambda)$ の0点は少くとも重複度2，すなわち $g(\lambda)=O((\lambda-\lambda_0)^2)$．ところがこのとき $f(\lambda)=a/g(\lambda)$ は λ_0 の近傍で可積分ではなくなる。故に $g(\lambda)$ は0点を持たない。すなわち $dF_z(\lambda)=0$． (q.e.d.)

次に，具体例として普通の意味のマルコフ性（単純マルコフ）と擬マルコフ（$L=\{+1,-1\}$ としたときの L-マルコフと同値）について調べる．

$$H^-(s,t)=C.L.H.\{x(u);\ u\leq s \text{ または } t\leq u\}$$

$$H^+(s,t)=C.L.H.\{x(u);\ s\leq u\leq t\}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$H_{s,t} = \text{C.L.H.}\{x(s),\ x(t)\}$$
$$H_t^+ = \text{C.L.H.}\{x(u);\ t \leq u\}$$
$$H_t^- = \text{C.L.H.}\{x(u);\ u \leq t\}$$
$$H_t = \text{C.L.H.}\{x(t)\}$$

とおく。

__定義 2.3.__ 定常列 $\{x(t)\}$ が単純マルコフ

$\Longleftrightarrow$

任意の t に対して

$$P_{H_t^-} H_t^+ \subset H_t .$$

__定義 2.4.__ 定常列 $\{x(t)\}$ が擬マルコフ

$\Longleftrightarrow$ すべての $-\infty < s < t < +\infty$ に対して

$$P_{H^-(s,t)} H^+(s,t) \subset H_{s,t} .$$

今

$$H_t^+ = H_t \oplus \hat{H}_t^+$$
$$H_t^- = H_t \oplus \hat{H}_t^-$$

とおく。($\oplus$ は直和を表わす。)

__補題 2.1.__ 単純マルコフ $\Longleftrightarrow$ 任意の t に対して

$$H_x = \hat{H}_t^- \oplus H_t \oplus \hat{H}_t^+ .$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

証明. ($\Rightarrow$) $\hat{H}_t^- \perp \hat{H}_t^+$ を示せばよい. $u \in \hat{H}_t^+ \subset H_t^+$ に対し, 仮定より $P_{H_t^-} u \in H_t$. 従って $P_{H_t^-} u \perp \hat{H}_t^-$, すなわち $u \perp \hat{H}_t^-$.

($\Leftarrow$) の証明は明らかである.

定理 2.9. 単純マルコフ $\Longrightarrow$ 擬マルコフ.

証明. $u \in H^+(s,t)$ を次のような直和に分解する.

$$u = u_{st} + \hat{u}, \quad u_{st} \in H_{s,t}, \quad \hat{u} \perp H_{s,t}$$

$$u_{st} = u_s + \hat{u}_s, \quad u_s \in H_s, \quad \hat{u}_s \perp H_s$$

$$= u_t + \hat{u}_t, \quad u_t \in H_t, \quad \hat{u}_t \perp H_t.$$

容易にわかるように

$$\hat{u}_s + \hat{u} \perp H_s.$$

一方単純マルコフ性から補題 2.1 を使って

$$\hat{u}_s + \hat{u} \perp H_s^-, \quad \text{かつ}$$

$$\hat{u}_s \perp H_s^-.$$

故に,

$$\hat{u} \perp H_s^-.$$

同様に t について考えると, $s < t$ だから

$$\hat{u} \perp H_t^+.$$

従って

$$\hat{u} \perp H^-(s,t).$$

すなわち

$$P_{H^-(s,t)}u = u_{st}$$

を得る。従って $\{x(t)\}$ は擬マルコフである。 (q.e.d.)

<u>定理 2.10.</u> 擬マルコフ かつ $B(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$

$\Longrightarrow$ 単純マルコフ.

<u>証明.</u> 3点 $s<u<t$ を任意に定める. $\|x(t)\|=1$ として一般性を失わない。

$$x(t) = a_s(t)x(s) + b_s(t)y,$$

$$y \in H_{s,t} \ominus H_s, \quad \|y\| = 1$$

と表わす. $a_s(t)$ と $b_s(t)$ の関係を求めると

$$B(t-s) = a_s(t)$$

$$1 = |a_s(t)|^2 + |b_s(t)|^2.$$

従って

$$|b_s(t)| = \sqrt{1-|B(t-s)|^2}.$$

今, s を固定して考えると, 仮定より十分大きな t に対して $b_s(t) \neq 0$. 擬マルコフ性より

$$P_{H^-(s,t)}x(u) = c_s(t)x(s) + d_s(t)y$$

$$= \left(c_s(t) - \frac{d_s(t)a_s(t)}{b_s(t)}\right)x(s) + \frac{d_s(t)}{b_s(t)}x(t).$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

任意の $v \leq s$ に対して

$$\left(P_{H^-(s,t)}x(u), x(v)\right) = \left(c_s(t) - \frac{d_s(t)a_s(t)}{b_s(t)}\right)B(s-v) + \frac{d_s(t)}{b_s(t)}B(t-v).$$

ところが仮定より

$$\lim_{t\to+\infty} b_s(t) = 1, \quad |c_s(t)|^2 + |d_s(t)|^2 \leq 1, \quad \lim_{t\to+\infty} B(t-v) = 0.$$

一方，上式の左辺 $= (x(u), x(v))$ だから

$$\lim_{t\to+\infty}\left(c_s(t) - \frac{d_s(t)a_s(t)}{b_s(t)}\right) = h(s)$$

が存在する。従って

$$(x(u), x(v)) = (h(s)x(s), x(v))$$

すなわち，

$$P_{H_s^-}x(u) = h(s)x(s)$$

を得る．従って $\{x(t)\}$ は単純マルコフ． (q.e.d.)

<u>定理 2.11.</u> $\{x(t)\}$ を<u>実</u> Hilbert 空間上の定常列とする。($\|x(t)\|$ $= 1$ を仮定する.) このとき，

$\{x(t)\}$ が擬マルコフ

$\iff$ (i) $B(t)\ \left(\equiv (x(t), x(0))\right) = \alpha^{|t|} \qquad 0 \leq |\alpha| \leq 1$

または， (ii) $B(t) = \cos t\theta$， $\theta =$ 無理数．

<u>証明.</u> まず，$^\exists k \neq 0$ $|B(k)| = 1$ ならば

擬マルコフ $\iff$ $B(t) = 1$ または $B(t) = (-1)^t$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

を示す. $k=1$ のとき仮定を満たすならば $B(1)=1$ のとき $x(0)=x(1)=\cdots=x(t)$ また, $B(1)=-1$ のときは $x(0)=-x(1)==\cdots=(-1)^t x(t)$ より明らか。従って $k>1$ のとき仮定を満たしている場合に必要性を示せばよい。擬マルコフ性と仮定から

$$P_{H^-(0,k)}x(1)=ax(0)$$

とかける. $x(0)$ との内積を考えて $B(1)=a$ を得る. $k\geq 2$ だから

$$x(1)-ax(0)\perp x(1-k)$$

すなわち

$$B(k)=aB(k-1)=B(1)B(k-1).$$

従って

$$1=|B(k)|=|B(1)||B(k-1)|.$$

一般に $|B(t)|\leq 1$ だから $|B(1)|=1$. 従って最初に考察した場合に帰着される.

次に, 任意の $n\neq 0$ に対して $|B(n)|<1$ のときに定理を証明しよう。そのためにまず

擬マルコフ $\iff$ $^\forall k, m, n>0$ に対し

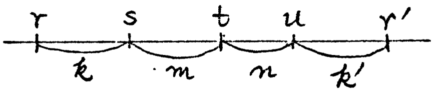
$$B(k+m)-aB(k)-bB(k+m+n)=0, \qquad (*)$$

ここで

$$a=\frac{B(m)-B(n)B(m+n)}{1-|B(m+n)|^2}, \quad b=\frac{B(n)-B(m)B(m+n)}{1-|B(m+n)|^2}, \qquad (**)$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

を示す.



とし, $\{x(t)\}$ が擬マルコフであると仮定すると

$$P_{H^-(s,u)}x(t) = ax(s) + bx(u).$$

上の式と $x(s)$, $x(u)$ との内積を考えると, それぞれ

$$B(m) = a + bB(m+n),$$

$$B(n) = aB(m+n) + b$$

を得る. これらの式より a, b を求めると $(**)$ を得る. さらに $x(r)$ との内積を考えると容易に $(*)$ を得る.

逆に $(*)$ と $(**)$ が成り立っているとき

$$(x(t) - ax(s) - bx(u), x(r))$$
$$= B(k+m) - aB(k) - bB(k+m+n) = 0$$
$$(x(t) - ax(s) - bx(u), x(r'))$$
$$= B(n+k') - aB(m+n+k') - bB(k') = 0.$$

従って

$$P_{H^-(s,u)}x(t) = ax(s) + bx(u).$$

すなわち $\{x(t)\}$ は擬マルコフである.

よって, 方程式 $(*)$ と $(**)$ を解けばよいことがわかった. いま, $\exists j \neq 0$, $R(j) = 0$ の場合を考える。 $m = n = j$ として $a = b = 0$ を

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

得る。従って (*) から

$$B(j+k)=0 \qquad (k \geq 1).$$

$j \geq 2$ で $B(k) \neq 0$, $0 \leq k \leq j-1$ とすると $k=j-1$, $m=j-1$, $n=1$ とおいて

$$a = B(j-1) \neq 0$$

$$B(2j-2) - aB(j-1) - bB(2j-1) = 0.$$

$2j-1 \geq 2j-2 > j$ だから $B(2j-2) = B(2j-1) = 0$. 従って $B(j-1)=0$ となり仮定に反する. すなわち $B(n)=0$ $(n \neq 0)$。このとき $B(n)$ は明らかに (*), (**) を満たす. すなわち $\alpha=0$ の場合である.

最後に $\forall n \neq 0$, $0<|B(n)|<1$ のときに (*), (**) を解く. $m=n=1$ とおくと

$$B(k+1) - aB(k) - aB(k+2) = 0.$$

ここで,

$$a = \frac{B(1)}{1+B(2)} \neq 0$$

となる。これは差分方程式だから, 一般論より

$$B(t) = \lambda^t \qquad (t \geq 0)$$

とおいて, λについての方程式を求めると

$$a\lambda^2 - \lambda + a = 0.$$

従って, $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2a}$.

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$$

とおく。

(i) $1-4a^2>0$ のとき，λ_1，λ_2 は実数で $|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|>1$。

$$B(t) = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t$$

と表わされるが，$\forall t \geq 0$，$|B(t)| \leq 1$ より $B=0$。さらに $B(0)=1$ より $A=1$。従って，このとき

$$B(t) = \lambda_1^{|t|}.$$

逆に，この式が (＊)，(＊＊) を満たすことは容易に確かめられる。

(ii) $1-4a^2=0$ のとき，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2a} = 1 \text{ または } -1.$$

すなわち $B(t)=1+ct$ または $(-1)^t(1+ct)$。これは仮定に反するから除外する。

(iii) $1-4a^2<0$ のとき

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{4a^2-1}\,i}{2a} = e^{-i\theta}$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{4a^2-1}\,i}{2a} = e^{i\theta}$$

とかける。$B(t)$ は実数だから

$$B(t) = C\cos t\theta + D\sin t\theta$$

とかける。$B(0)=1$ より $C=1$。さらに $B(t)$ が (＊)，(＊＊) を満たすことよ

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

り，少々面倒な計算によって $D=0$ が導かれる．さらに $|B(t)|<1$ より $\theta=$ 無理数がわかる．(q.e.d.)

注意．よく知られているように，(i) の場合が単純マルコフであるための必要十分条件である．従って，単純マルコフではなく，擬マルコフである場合が存在する．このときスペクトルは $\pm\theta$ に重さ $\frac{1}{2}$ を持つ点スペクトルである．なお，連続径数の場合，全直線で擬マルコフなる定義を離散径数の場合と同様に定義すると実は単純マルコフと一致してしまう．

[III] この小節で用いる記号を準備しておく．

$L_x = L^2[dF_{xx}]$, $L^+ = C.L.H.\{e^{it\lambda};\ t\geq 0\}$

$L^- = C.L.H.\{e^{it\lambda};\ t\leq 0\}$, $L^{+/-} = P^-L^+$

$P^- = L^-$ への射影， $P^+ = L^+$ への射影．

$L_0 = C.L.H.\{1\}$

$H^{2+} = H^2$

$H^{2-} = \{f(z);\ f(z) = \overline{g(1/\bar{z})},\ g(z)\in H^2\}$

$\tilde{f}(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$.

附録I，定理3.1より $H^{2+}\ni g(z)$ に対応する境界関数を $g(e^{i\lambda})$ で表わす．また $g(e^{i\lambda})\in H^{2+}$ は $g(z)\in H^{2+}$ が存在してその境界関数が $g(e^{i\lambda})$ であることを意味する．この対応によって $L^2[d\lambda]\supset H^{2+}$, H^{2-} と考えられる．

$\pi^- = L^2[d\lambda]$ から H^{2-} への射影

$\pi^+ = L^2[d\lambda]$ から H^{2+} への射影.

この小節では $dF_{xx}(\lambda) = f_{xx}(\lambda)d\lambda$ かつ $\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda > -\infty$ を常に仮定する. 従って附録 I の定理 3.7 より H^{2+} に属する outer function が存在して

$$f_{xx}(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$$

とかける.

<u>補題 2.2.</u>

(i) $L^+ = H^{2+}/g(e^{i\lambda})$

$$= \{h(e^{i\lambda})/g(e^{i\lambda})\,;\ h(z) \in H^{2+}\}$$

(ii) $L^- = H^{2-}/\bar{g}(e^{i\lambda})$

$$= \{\bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda})\,;\ h(z) \in H^{2+}\}$$

(iii) $L^2[d\lambda] = H^{2+} \oplus e^{-i\lambda} H^{2-}$

(iv) $P^- L_x = \bar{g}(e^{i\lambda})^{-1} \pi^- \bar{g}(e^{i\lambda}) L_x$

(v) $P^+ L_x = g(e^{i\lambda})^{-1} \pi^+ g(e^{i\lambda}) L_x$.

<u>証明.</u> (i) $L^+ \ni y(\lambda)$ とする。定義から z の多項式 $P_n(z)$ が存在して

$$\| y(\lambda) - P_n(e^{i\lambda}) \|_L \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty).$$

明らかに $P_n(z)g(z) \in H^{2+}$. 従って $y(\lambda)g(e^{i\lambda}) \in H^{2+}$. 逆に $g(z)$

は outer function だから $\{z^n g(z),\ n=0,1,2,\cdots\}$ は H^{2+} で dense (Hoffman Banach spaces of analytic function p.119 Beurling の定理). 従って $H^{2+}/g(e^{i\lambda}) \subset L^+$. 故に結論を得る.

(ii) は (i) と同様.

(iii) $\{e^{in\lambda},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は $L^2[d\lambda]$ で完全直交系をなすから $f(\lambda)\in L^2[d\lambda]$ は

$$f(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{in\lambda}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{in\lambda}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n e^{in\lambda}$$

と直和分解できて附録Iの定理3.1の系より第一項 $\in H^{2+}$, 第二項 $\in e^{-i\lambda}H^{2-}$.

(iv) $L_x \ni y(\lambda)$ とする. $\bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda)\in L^2[d\lambda]$. (ii) から $\pi^-\bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda)/\bar{g}(e^{i\lambda})\in L^-$. また L^- の元は $\bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda})$, $h(z)\in H^{2+}$ とかけるから

$$\left(y(\lambda),\bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda})\right)_L=\left(y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}),\bar{h}(e^{i\lambda})\right)_{L^2[d\lambda]}$$

$$=\left(y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}),\pi^-\bar{h}(e^{i\lambda})\right)_{L^2[d\lambda]}$$

$$=\left(\pi^-y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}),\bar{h}(e^{i\lambda})\right)_{L^2[d\lambda]}$$

$$=\left(\bar{g}(e^{i\lambda})^{-1}\pi^-\bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda),\bar{h}(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})^{-1}\right)_L.$$

故に $P^-y(\lambda)=\bar{g}(e^{i\lambda})^{-1}\pi^-\bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda)$.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(v). (iv)と同様.

定理 2.11.

(i) $L^- \neq L^{+/-} \iff$ inner function $j_1(z)$, $j_2(z)$ が存在して

$$\frac{g(e^{i\lambda})}{\bar{g}(e^{i\lambda})} = \frac{j_1(e^{i\lambda})}{j_2(e^{i\lambda})}.$$

(ii) $L^{+/-} = L^+ \cap L^-$

$\iff$ inner function $\theta(z)$ が存在して

$$\frac{g(e^{i\lambda})}{\bar{g}(e^{i\lambda})} = \theta(e^{i\lambda}).$$

証明. (i) ($\Leftarrow$) $j_1(z)$, $j_2(z)$ は $j_1(0)=j_2(0)=0$ と仮定して一般性を失わない。もしそうでないならば $zj_1(z)$, $zj_2(z)$ を考えればよい。このとき $\bar{j}_1(e^{i\lambda}) \in L^- \ominus L^{+/-}$ を示す。実際, $j_1(z) \in H^{2+}$, $g(z) \in H^{2+}$ だから $\bar{j}_1(z)\bar{g}(z) \in H^{2-}$。従って $\bar{j}_1(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda}) \in H^{2-}$ より補題 2.2 (ii) を使って $\bar{j}_1(e^{i\lambda}) \in L^-$. さらに

$$\begin{aligned}
\bar{j}_1(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda}) &= \bar{j}_1(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda})j_1(e^{i\lambda})/j_2(e^{i\lambda}) \\
&= \bar{g}(e^{i\lambda})\bar{j}_2(e^{i\lambda}) \qquad (\because |j_k(e^{i\lambda})| = 1) \\
&\in e^{-i\lambda}H^{2-} \qquad (\because j_2(0)=0).
\end{aligned}$$

故に, 補題 2.2 の (iv) より任意の $y(\lambda) \in L^+$ に対して

$$\begin{aligned}
(\bar{j}_1(e^{i\lambda}), P^- y(\lambda))_L &= (\bar{j}_1(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda}), \pi^- \bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda))_{L^2[d\lambda]} \\
&= (\bar{j}_1(e^{i\lambda})\bar{g}(e^{i\lambda}), \bar{g}(e^{i\lambda})y(\lambda))_{L^2[d\lambda]}
\end{aligned}$$

$$= (\bar{j}_1(e^{i\lambda})g(e^{i\lambda}),\ g(e^{i\lambda})y(\lambda))_{L^2[d\lambda]}$$

$$= 0 \qquad (\because \bar{j}_1(z)g(z) \in e^{-i\lambda}H^{2-},\ g(e^{i\lambda})y(\lambda) \in H^{2+}).$$

$(\Rightarrow)$ の証明．仮定から $y(\lambda) \in L^- \ominus L^{+/-}$，$y(\lambda) \neq 0$ なる元が存在する．補題 2.2 (ii) から $y(\lambda) = \bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda})$，$h \in H^{2+}$，とかける．さらに附録Ｉの定理 4.2 から inner function $j_1(z)$ と outer function $r_1(z)$ が存在して $h(z) = j_1(z)r_1(z)$ とかける．次に $y(\lambda)g(e^{i\lambda}) \perp H^{2+}$ を示そう．実際任意の $k(z) \in H^{2+}$ に対して

$$(y(\lambda)g(e^{i\lambda}),\ k(e^{i\lambda}))_{L^2[d\lambda]}$$

$$= (y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}),\ \bar{g}(e^{i\lambda})k(e^{i\lambda})/g(e^{i\lambda}))_{L^2[d\lambda]}$$

$$= (\pi^- y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}),\ \bar{g}(e^{i\lambda})k(e^{i\lambda})/g(e^{i\lambda}))_{L^2[d\lambda]}$$

$$= (P^- y(\lambda),\ k(e^{i\lambda})/g(e^{i\lambda}))_L$$

$$= (y(\lambda),\ P^- k(e^{i\lambda})/g(e^{i\lambda}))_L$$

$$= 0 \qquad (\because y(\lambda) \perp L^{+/-}).$$

従って補題 2.2 の (iii) から $y(\lambda)g(e^{i\lambda}) \in H^{2-}$．従って inner function $j_2(z)$ と outer function $r_2(z)$ が存在して $y(\lambda)g(e^{i\lambda}) = \bar{j}_2(e^{i\lambda})\bar{r}_2(e^{i\lambda})$ とかける．故に

$$y(\lambda)g(e^{i\lambda}) = g(e^{i\lambda})\bar{j}_1(e^{i\lambda})\bar{r}_1(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda}) = \bar{j}_2(e^{i\lambda})\bar{r}_2(e^{i\lambda}).$$

最後の等式で絶対値をとると $|j_1(e^{i\lambda})| = |j_2(e^{i\lambda})| = 1$ より $|r_1(e^{i\lambda})| = |r_2(e^{i\lambda})|$．絶対値 1 の定数を inner function の方にくりこんでおけば $r_1(z) = r_2(z)$．故に

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\frac{g(e^{i\lambda})}{\bar{g}(e^{i\lambda})} = \frac{\bar{j}_2(e^{i\lambda})}{\bar{j}_1(e^{i\lambda})}\frac{\bar{r}_2(e^{i\lambda})}{\bar{r}_1(e^{i\lambda})} = \frac{j_1(e^{i\lambda})}{j_2(e^{i\lambda})}.$$

(ii) この小節の仮定より $L_x \neq L^-$. 従って $L^- \neq L^+ \cap L^-$, 故に $L^+ \cap L^- = L^{+/-}$ ならば $L^- \neq L^{+/-}$. 従って (i) より inner function $j_1(z)$, $j_2(z)$ があって

$$\frac{g(e^{i\lambda})}{\bar{g}(e^{i\lambda})} = \theta(e^{i\lambda}) = \frac{j_1(e^{i\lambda})}{j_2(e^{i\lambda})}$$

とかけていると仮定してよい。ここで $j_1(z)$, $j_2(z)$ は互に素. すなわち $j_1(z) = j_0(z)j_1'(z)$, $j_2(z) = j_0(z)j_2'(z)$ のように inner function の積にかけていれば $j_0(z) \equiv 1$.

$L^- = L^{+/-} \oplus M$ とおくとき

$$M = L^- \cap \frac{e^{-i\lambda}H^{2-}}{g(e^{i\lambda})j_2(e^{i\lambda})}$$

とかけることを示そう.

$y(\lambda) \in M \subset L^-$ とすると 補題 2.2 より $y(\lambda) = \bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda})$ と表わされるから

$$\begin{aligned} y(\lambda) \in M &\Leftrightarrow y(\lambda) \perp L^{+/-} = P^- L^+ = \bar{g}(e^{i\lambda})^{-1}\pi^- \bar{g}(e^{i\lambda})L^+ \\ &\Leftrightarrow y(\lambda)\bar{g}(e^{i\lambda}) = \bar{h}(e^{i\lambda}) \perp \pi^- \bar{g}(e^{i\lambda})H^{2+}/g(e^{i\lambda}) \\ &\Leftrightarrow \bar{h}(e^{i\lambda}) \perp \bar{g}(e^{i\lambda})H^{2+}/g(e^{i\lambda}) \quad (\because \bar{h}(z) \in H^{2-}) \\ &\Leftrightarrow \frac{g(e^{i\lambda})\bar{h}(e^{i\lambda})}{\bar{g}(e^{i\lambda})} = g(e^{i\lambda})y(\lambda) \perp H^{2+} \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\Leftrightarrow g(e^{i\lambda})y(\lambda) \in e^{-i\lambda}H^{2-}.$$

次に上の関係式から $g(e^{i\lambda})y(\lambda) = g(e^{i\lambda})\bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda}) \in e^{-i\lambda}H^{2-}$

だから

$$\bar{h}(z) = \bar{j}_3(z)\bar{r}_3(z) = \bar{j}_4(z)\bar{r}_4(z)j_2(z)/j_1(z), \quad j_4(0)=0$$

とかける。ここで $j_3(z)$, $j_4(z)$ は inner function, $r_3(z)$, $r_4(z)$ は outer function. (i) の場合と同様な考察により $r_3(z)=r_4(z)$。故に

$$j_1(z)j_4(z) = j_2(z)j_3(z).$$

$j_1(z)$ と $j_2(z)$ は互に素に選んであるから ($j_2(0) \neq 0$)

$$j_4(z) = j_2(z)j_5(z), \quad j_5(0)=0$$

とかける。ここで $j_5(z)$ は inner function. 従って

$$\bar{h}(e^{i\lambda}) = \bar{j}_5(e^{i\lambda})\bar{r}_4(e^{i\lambda})/j_1(e^{i\lambda}) \in e^{-i\lambda}H^{2-}/j_1(e^{i\lambda})$$

すなわち

$$y(\lambda) = \bar{h}(e^{i\lambda})/\bar{g}(e^{i\lambda}) \in \frac{e^{-i\lambda}H^{2-}}{g(e^{i\lambda})j_2(e^{i\lambda})}.$$

故に

$$M = L^- \cap \frac{e^{-i\lambda}H^{2-}}{g(e^{i\lambda})j_2(e^{i\lambda})}.$$

故に

$$L^{+/-} = L^- \cap \frac{H^{2+}}{g(e^{i\lambda})j_2(e^{i\lambda})}$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$= L^- \cap \frac{L^+}{j_2(e^{i\lambda})}.$$

結局

$$L^{+/-} = L^- \cap L^+ \iff j_2(z) \equiv 1.$$

§3. regularity

$$H_x = \text{C.L.H.}\{x(t);\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

$$H(t) = \text{C.L.H.}\{x(s);\ s \le t\}$$

$$H^+ = \text{C.L.H.}\{x(s);\ s \ge 0\}$$

P_t : $H(t)$ への射影

P^+ : H^+ への射影，　$B_t = P_t P^+ P_t$

とする。

Kolmogorov によれば定常列 $\{x(t)\}$ は

$$\bigcap_t H(t) = \{0\}$$

のとき regular と呼ばれた。(この附録 §1 の regular とは異なる。)

そして $\{x(t)\}$ が regular であるための必要十分条件は $dF_{xx}(\lambda)$ が絶対連続でその密度関数 $f_{xx}(\lambda)$ が

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{xx}(\lambda) d\lambda > -\infty$$

を満たすことであった。

この §では「regular」より強い性質を B_t によって定義し，スペクトル

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

によって characterize する。

定義 3.1. $\{x(t)\}$ が linearly completely regular (strongly mixing)

$\Longleftrightarrow$ (i) $\{x(t)\}$ が regular

(ii) B_{-1} が完全連続作用素.

定義 3.2. $\{x(t)\}$ が absolutely regular

$\Longleftrightarrow$ (i) $\{x(t)\}$ が regular

(ii) B_{-1} が有限な trace をもつ完全連続作用素.

定義 3.3. $\{x(t)\}$ が uniformly strongly regular

$\Longleftrightarrow$ $t<0$ が存在して $B_t=0$.

定理 3.1. $\{x(t)\}$ が regular

$\Longleftrightarrow$ $\forall y\in H_x$ に対して $\lim_{t\to-\infty}\|B_t y\|=0$.

証明. ($\Rightarrow$) $\|B_t y\|\le\|P_t y\|\longrightarrow 0\quad(t\to-\infty)$.

($\Leftarrow$) regular でないとする。すなわち $\bigcap_t H(t)\equiv H(-\infty)\neq\{0\}$.
ここで $H(-\infty)\perp H^+$ とはなり得ない。何故ならば T_u を $T_u x(t)=x(t+u)$ で定義される H_x 上の onto isometric な写像とすると定義により任意の u に対して $T_u H(-\infty)=H(-\infty)$ だから $H(-\infty)\perp H^+\Longrightarrow H(-\infty)\perp T_u H^+$. ところが $\{T_u H^+,\ u=-1,-2,\cdots\}$ の閉包は H_x だから

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$H(-\infty) \perp H_x$, 従って $H(-\infty)=\{0\}$ となって矛盾.

いま $P^+H(-\infty)=H_1^+$ とおき, $H^+=H_1^+\oplus H_2^+$ と分解すると明らかに $H(-\infty)\perp H_2^+$. 次に任意の $y\in H(-\infty)$ に対して $\lim_{t\to-\infty}\|B_t y\|=0$ とする. $H_1^+\ni v$ に対して $P^+v_1=v$ となる $v_1\in H(-\infty)$ が存在するから $(y,v)=(P_t y, P^+v_1)=(B_t y, v_1)\to 0 \quad (t\to-\infty)$.
故に $H(-\infty)\perp H_1^+$, すなわち $H(-\infty)\perp H^+$ となって初めに述べたことに矛盾. (q.e.d.)

<u>定理 3.2.</u> *linearly completely regular*

$\Longleftrightarrow \lim_{t\to-\infty}\|B_t\|=0$.

<u>証明.</u> ($\Rightarrow$) $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots>0$ を B_{-1} の 0 でない固有値, e_1, e_2, ... を対応する正規化した固有ベクトルとする. $H_e=C.L.H.\{e_1,e_2,\cdots\}$ とする. $H_0=H(-1)\ominus H_e$ は H^+ と直交するから H_e に属する元についてだけ考えれば十分である. $y\in H(t)\cap H_e$, $\|y\|=1$, $t\leq -1$ を考える.

$$y=\sum a_j e_j$$

と表わされる. ここで

$$|a_j|=|(y,e_j)|=|(y,P_t e_j)|\leq\|P_t e_j\|,$$

$\{x(t)\}$ は regular だから $\lim_{t\to-\infty}\|P_t e_j\|=0$.

次に $\forall\varepsilon>0$, $\exists n$, $\forall s>n$ $\lambda_s<\varepsilon$ とできるから

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

$$\begin{aligned}\|B_t\| &\le \sup_{\substack{\|y\|=1\\ y\in H(t)\cap H_e}} \|P^+y\| = \sup\Big(\sum_{i,j} a_i\bar{a}_j (P^+e_i, e_j)\Big)^{1/2} \\ &= \sup\Big(\sum_{i,j} a_i\bar{a}_j (B_1 e_i, e_j)\Big)^{1/2} \\ &= \sup\Big(\sum |a_j|^2 \lambda_j\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\lambda_1 n \max_{1\le j\le n} \|P_\tau e_j\| + \lambda_{n+1}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

故に $\varlimsup_{t\to-\infty} \|B_t\| \le \sqrt{\varepsilon}$.

($\Leftarrow$) 定理3.1から $\{x(t)\}$ は regular. さらに $t<-1$ に対して $H(-1)=H(t)\oplus R_t$ とかけて R_t は有限次元。 Q_t を $H(-1)$ から R_t への射影とすると $P_t+Q_t=P_{-1}$ ($H(-1)$ 上で)。故に

$$\begin{aligned}B_{-1} &= (P_t+Q_t)P^+(P_t+Q_t) \\ &= P_tP^+P_t + K_t = B_t + K_t.\end{aligned}$$

ここで K_t はコンパクト作用素.

$$\|B_{-1}-K_t\| = \|B_t\| \longrightarrow 0 \quad (t\to-\infty).$$

従って B_{-1} は完全連続作用素. (q.e.d.)

定理3.3. $\lim_{t\to-\infty}\|B_t\|=0$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\substack{y\in H^+\\ \|y\|=1}} \|P_t y\| \longrightarrow 0 \quad (t\to-\infty).$$

証明. $$\sup_{\substack{y\in H^+\\ \|y\|=1}} \|P_t y\| = \sup_{\substack{u\in H^+\\ v\in H(t)\\ \|u\|=\|v\|=1}} (u,v)$$

$$= \sup_{\substack{v \in H(t) \\ \|v\|=1}} \|P^+ v\|$$

$$= \sup_{\substack{v \in H(t) \\ \|v\|=1}} (P_t P^+ P_t v, v)$$

$$= \sup_{\substack{v \in H(t) \\ \|v\|=1}} \|B_t v\| = \|B_t\|.$$

定理3.4. $f_{xx}(\lambda)$ が連続で $f_{xx}(\lambda) \geq m > 0$

$\Rightarrow$ linearly completely regular で

$$\|B_t\| \leq \frac{1}{m} E_{t-1}[f_{xx}].$$

ここで $E_n[h] = \sup_{\substack{-\pi \leq \lambda \leq \pi \\ P_n}} |h(\lambda) - P_n(e^{i\lambda})|$, P_n は n 次以下の多項式.

証明. 定理3.3, §2の補題2.1より

$$\|B_t\| = \sup_{\substack{u \in H^+ \\ v \in H(t) \\ \|u\|=\|v\|=1}} |(u, v)|$$

$$= \sup \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda t} g_1(e^{i\lambda t}) g_2(e^{i\lambda t}) f_{xx}(\lambda) d\lambda.$$

ここで sup は $g_i(z) \in H^{2+}/g(e^{i\lambda})$, $\int_{-\pi}^{\pi} |g_i(e^{i\lambda})|^2 f_{xx}(\lambda) d\lambda = 1$ について

とる. §2補題2.1で用いたBeurlingの定理より $z^n g(z)$, $n = 0, 1, 2,$

$\cdots$ は H^{2+} を張り, さらに $\{z^n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ も H^{2+} を張るから上の

sup は $g_i(z) \in H^{2+}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |g_i(z)|^2 f_{xx}(\lambda) d\lambda = \|g_i\|_L^2 \leq 1$ の範囲

でとればよい。ところが, 附録I, 定理3.6から $h(z) = g_1(z) g_2(z) \in H^1$,

$\|h\|_L^{(1)} = \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\lambda})| f_{xx}(\lambda) d\lambda \leq \|g_1\|_L \|g_2\|_L \leq 1$. 逆に $h(z) \in H^1$ とすると $h(z) = g_1(z) g_2(z)$, $g_i(z) \in H^{2+}$ とかけて $|h(e^{i\lambda})| = |g_1(e^{i\lambda})|^2 = |g_2(e^{i\lambda})|^2$. 従って $\|h\|_L^{(1)} = \|g_i\|_L^2$. 故に

$$\|B_t\| = \sup_{\substack{h(z) \in H^1 \\ \|h\|_L^{(1)} \leq 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda t} h(e^{i\lambda}) f_{xx}(\lambda) d\lambda \right|, \quad t \leq -1.$$

一方 高々 $(t-1)$ 次の z の多項式 $Q(z)$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda t} h(e^{i\lambda t}) \overline{Q(e^{i\lambda t})} d\lambda = 0, \quad t \leq -1$$

だから

$$\|B_t\| = \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda t} h(e^{i\lambda}) (f_{xx}(\lambda) - \overline{P_{t-1}(e^{i\lambda})}) d\lambda \right|$$

$$\leq E_{t-1}[f_{xx}] \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\lambda})| d\lambda \right|$$

$$\leq \frac{1}{m} E_{t-1}[f_{xx}]$$

(q.e.d.)

<u>定理3.5.</u> $f_1(\lambda)$ を linearly completely regular な stationary sequence の密度関数, $P(z)$ を n 次の多項式とするとき

$$f_2(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 f_1(\lambda)$$

はまた linearly completely regular な stationary sequence の密度関数である。このとき

$$\|B_t^{(2)}\| \leq \|B_{t-n}^{(1)}\|.$$

証明. $z^n|P(z)|^2 \in H^1$ で，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(e^{i\lambda})||P(e^{i\lambda})|^2 f_1(\lambda)d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}|h(e^{i\lambda})|f_2(\lambda)d\lambda$$

だから

$$\begin{aligned}\|B_t^{(2)}\| &= \sup\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(t-n)\lambda}h(e^{i\lambda})e^{in\lambda}|P(e^{i\lambda})|^2 f_1(\lambda)d\lambda\right| \\ &\le \sup\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(t-n)\lambda}h(e^{i\lambda})f_1(\lambda)d\lambda\right| \\ &= \|B_{t-n}^{(1)}\|.\end{aligned}$$

(q.e.d.)

定理 3.6. $\{x(t)\}$ が linearly completely regular

$\Longleftrightarrow$

$$f_{xx}(\lambda)=\omega(\lambda)|P(e^{i\lambda})|^2.$$

ここで，$P(z)$ は $|z|=1$ 上に根をもつ多項式で，$\omega(\lambda)$ は任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\omega(\lambda)=\exp\{r_\varepsilon(\lambda)+u_\varepsilon(\lambda)+\tilde{v}_\varepsilon(\lambda)\}$$

と表わされる。ここで $r_\varepsilon(\lambda)$ は $|z|=1$ 上で連続で

$$\sup_{-\pi\le\lambda\le\pi}\{|u_\varepsilon(\lambda)|+|v_\varepsilon(\lambda)|\}\le\varepsilon.$$

証明. ($\Leftarrow$) 定理 3.5 から $P(z)\equiv 1$ の場合を証明すればよい.

ワイエルストラス の 定理より n 次の三角多項式 $Q_\varepsilon(z)$ が存在して

$$e^{r_\varepsilon(\lambda)}=Q_\varepsilon(e^{i\lambda})(1+\theta_\varepsilon(\lambda)),\quad \max_\lambda|\theta_\varepsilon(\lambda)|<\varepsilon$$

とできる。

Sem. on Probab.
Vol.39　1973年
P1-184

$$f_\varepsilon(\lambda) = |Q_\varepsilon(e^{i\lambda})||\exp(\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon)||\exp(u_\varepsilon + i\tilde{u}_\varepsilon)|$$

とおく。 $t \leq -n$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_1(e^{i\lambda}) g_2(e^{i\lambda}) e^{-it\lambda} Q_\varepsilon(e^{i\lambda}) e^{\tilde{v}_\varepsilon - iv_\varepsilon + u_\varepsilon + iu_\varepsilon} d\lambda = 0.$$

それ故

$$\|B_t\| \leq \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_1(e^{i\lambda}) g_2(e^{i\lambda}) f_{xx}(\lambda) d\lambda \right|$$

$$\leq \sup \int_{-\pi}^{\pi} |g_1(e^{i\lambda}) g_2(e^{i\lambda})| |f_\varepsilon(\lambda)| |\theta_\varepsilon(\lambda)| d\lambda$$

$$\leq 2\varepsilon \|g_1\|_L \|g_2\|_L.$$

（⇒）の証明は少々やっかいなので省略する。（[7] 5章, 定理3.）

定理3.7. $f_{xx}(\lambda) = |g(e^{i\lambda})|^2$

$$C(\lambda) \equiv g(e^{i\lambda}) / \overline{g(e^{i\lambda})}$$

$$C(\lambda) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\lambda}$$

とするとき,

$\{x(t)\}$ が absolutely regular

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} j |c_j|^2 < +\infty.$$

証明. $e_k(\lambda) = \dfrac{e^{-i\lambda k}}{\sqrt{2\pi}\ \overline{g(e^{i\lambda})}}$, $k = 1, 2, \cdots$

は $L(-1) \equiv C.L.H.\{e^{ik\lambda}\ ;\ k \leq -1\} \subset L^2[dF_{xx}]$ の完全正規直交系

である．実際，§2の補題2.1から $e_k(\lambda) \in L(-1)$ であって

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k(\lambda)\overline{e_j(\lambda)} f_{xx}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(j-k)} d\lambda = \delta_{jk}$$

さらに，$\{e^{-i\lambda k};\ k=1,2,\cdots\}$ は $e^{-i\lambda}H^{2-}$ を張るから§2の補題2.2から $\{e_k(\lambda);\ k=1,2,\cdots\}$ は $L(-1)$ を張る．L^+, $L(-1)$ への射影を同じ記号 P^+, P_{-1} で表わすとやはり§2の補題2.2から

$$\begin{aligned}
S_p B_{-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (B_{-1}e_k, e_k)_L \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (P_{-1}P^+P_{-1}e_k, e_k)_L \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (P^+e_k, e_k)_L \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (g^{-1}\pi^+ g e_k, e_k)_L \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\pi^+ g e_k, g e_k)_{L^2[d\lambda]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|g e_k\|^2_{L^2[d\lambda]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\|\sum_{j=k}^{\infty} c_j e^{i(j-k)\lambda}/\sqrt{2\pi}\Big\|^2_{L^2[d\lambda]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} |c_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j|c_j|^2
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

<u>定理 3.8.</u> $\{x(t)\}$ が absolutely regular

$\Longleftrightarrow$ $f_{xx}(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 a(\lambda)$,

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

ここで $P(z)$ は $|z|=1$ 上に根をもつ多項式で $\log a(\lambda)$ は可積分 かつ そのフーリエ変換を

$$\log a(\lambda) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda}$$

とするとき

$$\sum |j||a_j|^2 < +\infty.$$

証明は必要条件，十分条件共に容易ではないので省略する．([7] 4章定理8.)

<u>注意.</u> $\{x(t)\}$ が平均0の正規定常過程のとき，regular, strongly mixing, absolutely regular, uniformly strongly mixing は σ-field の言葉で表現することができる．すなわち

$$\mathfrak{A} = \sigma\{x(t);\ t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

$$\mathfrak{A}^+ = \sigma\{x(t);\ t=0,1,2,\cdots\}$$

$$\mathfrak{A}^-(t) = \sigma\{x(s);\ s \leq t\}$$

とするとき．

(i) regular

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall B \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{A \in \mathfrak{A}^-(t)} |P(A\cap B)-P(A)P(B)| = 0.$$

(ii) strongly mixing

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to-\infty} \sup_{\substack{A\in\mathfrak{A}^+ \\ B\in\mathfrak{A}^-(t)}} |P(A\cap B)-P(A)P(B)| = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

(iii) absolutely regular

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{t\to-\infty} E[\sup_{A\in\mathfrak{A}^-(t)} |P(A/\mathfrak{A}^+)-P(A)|]$$

(iv) uniformly strongly mixing

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{ess.sup}_{\omega} \sup_{A\in\mathfrak{A}^-(t)} |P(A)/\mathfrak{A}^+)-P(A)|$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \sup_{\substack{A\in\mathfrak{A}^-(t)\\ B\in\mathfrak{A}^+}} |P(A\cap B)-P(A)P(B)|/P(B)$$

$$= 0.$$

証明は [7] の4章にある.

σ-field の regularity としてはもう一つ; informationally regular という概念が定義できるが, 正規定常過程の場合, absolutely regular のときかつそのときに限り informationally regular であることが知られている。([7] 4章 §3.)

References

A. M. Yaglom

[1] On problems about linear interpolation of stationary random sequences and processes, Uspehi Mat. Nauk, 4 (1949) (English transla-

tion)

[2] Theory of extrapolation and filtering of random processes, Ukraina Mat. 20 (1954).

[3] Extrapolation, interpolation and filtration of stationary random processes with rational spectral density, Trudy Moscow Mat. 4 (1955) Sel. Transl. M.S.P. 4 (1963).

[4] Outline of some topics in linear extrapolation of stationary random processes, 5th Berkeley Symp. vol.II, Part I, (1965).

I. A. Ibragimov

[1] On the spectral functions of some classes of stationary Gaussian processes, Dokl. A. N. 137 (1961).

[2] On stationary Gaussian sequences satisfying a strong mixing condition, Dokl. A. N. SSSR, 147 (1962).

[3] On the spectrum of stationary Gaussian sequences satisfying a strong mixing condition I. Necessary conditions, Theory Prob. Appl.

10 (1965).

[4] On a strong mixing condition for stationary Gaussian processes, Dokl. A. N. 161 (1965).

[5] On complete regularity of multi-dimensional stationary processes with discrete time, Dokl. A. N. 162 (1965).

[6] On the spectrum of stationary Gaussian sequences which satisfying the strong mixing condition II. Sufficient condition. The rate of mixing, Theory Prob. Appl. 15 (1970).

[7] (with Yu. A. Rozanov) Gaussian random processes, Moscow (1970).

Yu. A. Rozanov

[1] On the linear interpolability of stationary processes in discrete time, Dokl. A. N. 116 (1957).

[2] Spectral theory of multi-dimensional stationary random processes with discrete time, Uspehi Mat. N. 13 (1958). Select. Transl. M. S. P. vol.1.

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

[3] The linear extrapolation of multi-dimensional stationary processes of rank 1 with discrete time, Dokl. A. N. 125 (1959).

[4] On the interpolation of stationary processes with discrete time, Dokl. A. N. 130 (1960).

[5] (with Kolmogorov) On strong mixing conditions of a Gaussian stationary process, Theory Prob. Appl. 5 (1960).

[6] On Gaussian fields with given conditional distribution, Theory Prob. Appl. vol.12 (1967).

M. G. Krein

[1] On a generalization of some investigations of G. Szegö, V. Smirnov, and A. Kolmogorov, C. R. A. S. URSS, XLVI (1945).

[2] On a problem of extrapolation of A. N. Kolmogorov, C. R. A. S. URSS, XLVI (1945).

J. L. Doob

[1] The elementary Gaussian processes, Annals of Math. Stat. vol.15 (1944).

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

H. Helson, D. Sarason,

[1] Past and future, Math. Scand. 21 (1967).

S. C. Chay

[1] On quasi-Markov random fields, J. Multivariate Analysis, 2, 14-76 (1972).

Sem. on Probab.
Vol.39 1973年
P1-184

1973年７月発行　確率論セミナー